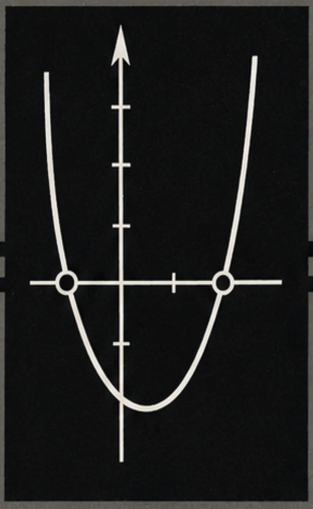
Справочник по элементарной математике

арифметика
алгебра



«НАУКОВА ДУМКА»

К. И. Швецов, Г. П. Бевз

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Арифметика, алгебра

НАУКОВА ДУМКА
КИЕВ—1965

51(083)
Ш35

Справочник охватывает все вопросы школьной программы по арифметике, алгебре, включая таблицы, функции и графики. Здесь, кроме материала школьной программы, читатель найдет справочные указания о способах решения «типовых» примеров и задач, исторические справки и литературу.

В справочнике даны указания, как проводить операции на счетах, арифмометре и логарифмической линейке.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей; особенно полезным он может быть для поступающих в высшие и средние учебные заведения.

ХАРЬКОВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА им. ФРУНЗЕ

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 7

I. ТАБЛИЦЫ

§ 1. Латинский алфавит 9
§ 2. Греческий алфавит 9
§ 3. Некоторые математические обозначения 10
§ 4. Некоторые постоянные 11
§ 5. Квадраты 12
§ 6. Квадратные корни 15
§ 7. Кубы 20
§ 8. Значения дробей вида $\frac{1}{n}$ 26
§ 9. Десятичные логарифмы 31
§ 10. Антилогарифмы 34
§ 11. Факториалы 37
§ 12. Биномиальные коэффициенты 37
§ 13. Простые числа, не превосходящие 6000 38

II. АРИФМЕТИКА

Предмет арифметики 40

Целые неотрицательные числа

§ 1. Нумерация 41
§ 2. Арифметические действия 46
§ 3. Свойства арифметических действий 51
§ 4. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных 56
§ 5. Порядок действий, скобки 58
§ 6. Проверка арифметических действий 60
§ 7. Способы быстрых вычислений 61
§ 8. Инструментальные вычисления 64
§ 9. Делимость чисел 69

Стр.
§ 10. Признаки делимости 71
§ 11. Простые и составные числа 73
§ 12. Общие делители и кратные 76
§ 13. Недесятичные системы счисления 79

Дробные числа

§ 14. Обыкновенные дроби 83
§ 15. Изменение величины дроби с изменением ее членов . . . 86
§ 16. Преобразование дробей 88
§ 17. Арифметические действия над обыкновенными дробями . . 89
§ 18. Основные типы задач на дроби 95
§ 19. Десятичные дроби 97
§ 20. Действия над десятичными дробями 99
§ 21. Периодические десятичные дроби 102
§ 22. Проценты 104
§ 23. Основные типы задач на проценты 105
§ 24. Приближенные вычисления 108
§ 25. Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр 111
§ 26. Приближенные вычисления по способу границ 114

Величины и пропорции

§ 27. Измерение величин 115
§ 28. Метрическая система мер 117
§ 29. Система СИ 119
§ 30. Исторические сведения о метрологии 120
§ 31. Именованные числа 122
§ 32. Отношение чисел 125
§ 33. Пропорции 126
§ 34. Пропорциональная зависимость величин 131
§ 35. Задачи на пропорциональные величины 133
§ 36. Арифметические задачи 136

III. АЛГЕБРА

Исторические сведения о развитии алгебры 148

Рациональные числа и алгебраические выражения

§ 1. Рациональные числа 153
§ 2. Действия с рациональными числами 154
§ 3. Алгебраические выражения 157
§ 4. Тождественные преобразования целых выражений 161
§ 5. Действия над целыми алгебраическими выражениями . . . 163

Стр.
§ 6. Формулы сокращенного умножения 167
§ 7. Разложение многочленов на множители 171
§ 8. Алгебраические дроби 173
§ 9. Действия с алгебраическими дробями 177

Иррациональные числа и алгебраические выражения

§ 10. Квадратные корни 180
§ 11. Иррациональные числа 183
§ 12. Действия над действительными числами 186
§ 13. Иррациональные выражения 188
§ 14. Действия с радикалами 198
§ 15. Степени с отрицательными, нулевыми и дробными показателями 210

Уравнения и неравенства

§ 16. Общие сведения об уравнениях 215
§ 17. Уравнения первой степени 220
§ 18. Решение задач с помощью уравнений первой степени с одним неизвестным 224
§ 19. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 229
§ 20. Системы линейных уравнений с тремя неизвестными . . . 237
§ 21. Решение задач с помощью системы уравнений 244
§ 22. Квадратные уравнения 249
§ 23. Задачи на составление квадратных уравнений 259
§ 24. Иррациональные уравнения 264
§ 25. Системы уравнений второй степени с двумя неизвестными 269
§ 26. Задачи на составление систем уравнений 278
§ 27. Числовые неравенства 284
§ 28. Неравенства первой степени 286
§ 29. Неравенства второй степени и высших степеней 292
§ 30. Тождественные неравенства 297

Функции и графики

§ 31. Функциональная зависимость величин 299
§ 32. Простейшие функции и их графики 305
§ 33. Графические способы решения уравнений и неравенств . . 314
§ 34. Логарифмы 318
§ 35. Логарифмирование и потенцирование 323
§ 36. Десятичные логарифмы 325

Стр.
§ 37. Показательные и логарифмические уравнения 332
§ 38. Логарифмическая линейка 342
§ 39. Вычисления на логарифмической линейке 345
§ 40. Исторические сведения о логарифмах и логарифмической линейке 349
§ 41. Числовые последовательности 351
§ 42. Арифметическая прогрессия 361
§ 43. Геометрическая прогрессия 364
§ 44. Метод математической индукции 369

Комплексные числа и уравнения высших степеней

§ 45. Комплексные числа 371
§ 46. Тригонометрическая форма комплексного числа 377
§ 47. Исторические сведения о комплексных числах 385
§ 48. Уравнения высших степеней 386

Соединения и бином Ньютона

§ 49. Соединения 396
§ 50. Решение примеров и задач на соединения 400
§ 51. Бином Ньютона 404

Алфавитный указатель 410

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Справочник по элементарной математике (арифметика, алгебра)» состоит из трех частей: таблицы, арифметика и алгебра. Он составлен в соответствии с программой по математике для общеобразовательных средних школ.

Что найдет читатель в справочнике? Определения и описания понятий, формулировки правил, теорем, законов, свойств, важнейшие формулы, важнейшие типы задач и примеров, их решения, а также некоторые методические замечания. В разделе «Алгебра» уделено большое внимание решению линейных, квадратных, биквадратных и других типов уравнений. Достаточное место занимает решение различных систем уравнений. Здесь же даны графики элементарных функций и приведены графические способы решения уравнений и неравенств. Справочник снабжен также таблицами, используемыми в средней школе (квадраты, квадратные корни, кубы, десятичные логарифмы, антилогарифмы, факториалы, биномиальные коэффициенты и др.). Есть в книге много исторических справок. Они подготовлены старшим научным сотрудником Института истории АН УССР А. Н. Боголюбовым.

В справочнике даны сведения о способах вычисления на счетах, арифмометре и логарифмической линейке.

Как пользоваться справочником? Если читатель хочет обратиться к сравнительно широкому кругу вопросов, например к комплексным числам, арифметическим задачам, методу математической индукции, можно воспользоваться оглавлением. Если же читателя интересует какое-нибудь частное понятие,

термин, формула, лучше навести справку в алфавитном указателе, помещенном в конце книги. В нем числа указывают номера страниц, на которых раскрывается содержание данного понятия, приводится нужная формула и т. д.

Делая первую попытку создать справочник такого типа, авторы сознают, что в нем могут быть пробелы и недостатки. Все замечания и предложения будут приняты с благодарностью. Их можно направлять по адресу: Киев, 4, Репина, 3, издательство «Наукова думка».

I. ТАБЛИЦЫ

§ 1. Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Название букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Название букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	эн
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	эр
Ff	*Ff*	эф	Ss	*Ss*	эс
Gg	*Gg*	ге (же)	Tt	*Tt*	тэ
Hh	*Hh*	ха (аш)	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	и	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот(жи)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	икс
Ll	*Ll*	эль	Yy	*Yy*	игрек
Mm	*Mm*	эм	Zz	*Zz*	зет

§ 2. Греческий алфавит

Печатные	Рукописные	Название букв	Печатные	Рукописные	Название букв
Αα	Αα	альфа	Νν	Νν	ню (ни)
Ββ	Ββ	бета	Ξξ	Ξξ	кси
Γγ	Γγ	гамма	Οο	Οο	омикрон
Δδ	Δδ	дельта	Ππ	Ππ	пи
Εε	Εε	эпсилон	Ρρ	Ρρ	ро
Ζζ	Ζζ	дзета	Σσ	Σσ	сигма
Ηη	*Ηη*	эта	Ττ	Ττ	тау
Θθϑ	Θθϑ	тета	Υυ	Υυ	ипсилон (юпсилон)
Ιι	Ιι	йота	Φφ	Φφ	фи
Κκ	Κκ	каппа	Χχ	Χχ	хи
Λλ	Λλ	ламбда	Ψψ	Ψψ	пси
Μμ	Μμ	мю (ми)	Ωω	Ωω	омега

§ 3. Некоторые математические обозначения

$=$	равно	например	$a = b$
$\neq$	не равно	»	$a \neq b$
$\equiv$	тождественно равно	»	$a + b \equiv b + a$
$\approx$	приблизительно равно	»	$a \approx b$
$>$	больше	»	$5 > 2$
$<$	меньше	»	$3 < 10$
( ), [ ], { }	скобки круглые, квадратные, фигурные		
$\geqslant$	больше или равно,	например	$a \geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно	»	$a \leqslant b$
%	процент	»	5 %
‰	промилле	»	3 ‰
$\lvert\ \rvert$	абсолютное значение	»	$\lvert a \rvert$
$\sqrt{}$	корень второй степени (арифметический)	»	$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt[n]{}$	корень n-й степени	»	$\sqrt[n]{a}$
$f(x)$	функция от x	»	$f(3)$
!	факториал	»	$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 240$
$\log b$	логарифм при основании b	»	$\log_2 32 = 5$
lg	логарифм десятичный (логарифм при основании 10)	»	$\lg 1000 = 3$
ln	логарифм натуральный (логарифм при основании e)	»	$\ln e = 1$
$\rightarrow$	стремится к...		$x \rightarrow a$
lim	предел	»	$\lim\limits_{n \to \infty} P_n = C$
const	постоянная величина	»	π — const
$\sum$	сумма	»	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
i	мнимая единица	»	$\sqrt{-1} = i$
$\triangle$	треугольник	»	$\triangle$ ABC

$\angle$ или $\measuredangle$	угол	например	$\angle ABC$, или $\measuredangle ABC$
$\smile$ или $\frown$	дуга	»	$\overset{\smile}{AB}$, или $\overset{\frown}{AB}$, чаще $\smile AB$
$\parallel$	параллельно	»	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	»	$AB \perp CD$
$\sim$	подобно	»	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$
π	Отношение длины окружности к диаметру		
$^\circ$	градус	например	$40^\circ 36' 25''$
$'$	минута		
$''$	секунда		
	угловые или дуговые меры,		
sin	синус	»	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	косинус	»	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
tg	тангенс	»	$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$
ctg	котангенс	»	$\operatorname{ctg} 15^\circ 18' = 3{,}655$
sec	секанс	»	$\sec 60^\circ = 2$
cosec	косеканс	»	$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$
Arc sin	множество всех дуг, соответствующих данному значению тригонометрической функции	»	$\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2} = 30^\circ \times (-1)^n + 180^\circ n$
arc sin	главное значение дуги, соответствующей данному значению тригонометрической функции	»	$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$

§ 4. Некоторые постоянные

$$\pi \approx 3{,}14159\ 26536$$
$$\lg \pi \approx 0{,}49714\ 98727$$
$$e \approx 2{,}71828\ 18285$$
$$\lg e \approx 0{,}43429\ 44819$$
$$\lg 2 = 0{,}30102\ 99957$$

§ 5. Квадраты

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	11	13	16	19	22	24
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	3	6	9	12	15	19	22	25	28
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	4	8	12	16	19	23	27	31	35
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	4	8	12	16	20	25	29	33	37
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	4	9	13	17	21	26	30	34	39
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	5	9	14	19	23	28	33	38	42
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	5	10	15	20	25	31	36	41	46
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	6	11	17	23	28	34	40	46	51
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	6	12	18	24	29	35	41	47	53
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	6	12	18	24	30	37	43	49	55
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986				6	13	19	25	31	38	44	50	56
3,1								10,05	10,11	10,18	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	1	2	2	3	4	5	6	7	7

4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	2	3	5	6	8	10	11	13	14

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	2	4	5	7	9	11	13	15	16
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	2	4	6	8	9	11	13	15	17
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	2	4	6	8	10	11	13	15	17
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	2	4	6	8	10	12	14	15	17
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	2	4	6	8	10	12	14	16	18

§ 6. Квадратные корни

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,034	1,039	1,044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,1	1,049	1,054	1,058	1,063	1,068	1,072	1,077	1,082	1,086	1,091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,2	1,095	1,100	1,105	1,109	1,114	1,118	1,122	1,127	1,131	1,136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,3	1,140	1,145	1,149	1,153	1,158	1,162	1,166	1,170	1,175	1,179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,4	1,183	1,187	1,192	1,196	1,200	1,204	1,208	1,212	1,217	1,221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,5	1,225	1,229	1,233	1,237	1,241	1,245	1,249	1,253	1,257	1,261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,6	1,265	1,269	1,273	1,277	1,281	1,285	1,288	1,292	1,296	1,300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,7	1,304	1,308	1,311	1,315	1,319	1,323	1,327	1,330	1,334	1,338	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,8	1,342	1,345	1,349	1,353	1,356	1,360	1,364	1,367	1,371	1,375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,9	1,378	1,382	1,386	1,389	1,393	1,396	1,400	1,404	1,407	1,411	0	1	1	1	2	2	3	3	3
2,0	1,414	1,418	1,421	1,425	1,428	1,432	1,435	1,439	1,442	1,446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,1	1,449	1,453	1,456	1,459	1,463	1,466	1,470	1,473	1,476	1,480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,2	1,483	1,487	1,490	1,493	1,497	1,500	1,503	1,507	1,510	1,513	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,3	1,517	1,520	1,523	1,526	1,530	1,533	1,536	1,539	1,543	1,546	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,4	1,549	1,552	1,556	1,559	1,562	1,565	1,568	1,572	1,575	1,578	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,5	1,581	1,584	1,587	1,591	1,594	1,597	1,600	1,603	1,606	1,609	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,6	1,612	1,616	1,619	1,622	1,625	1,628	1,631	1,634	1,637	1,640	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2,7	1,643	1,646	1,649	1,652	1,655	1,658	1,661	1,664	1,667	1,670	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2,8	1,673	1,676	1,679	1,682	1,685	1,688	1,691	1,694	1,697	1,700	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,9	1,703	1,706	1,709	1,712	1,715	1,718	1,720	1,723	1,726	1,729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,0	1,732	1,735	1,738	1,741	1,744	1,746	1,749	1,752	1,755	1,758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,1	1,761	1,764	1,766	1,769	1,772	1,775	1,778	1,780	1,783	1,786	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,2	1,789	1,792	1,794	1,797	1,800	1,803	1,806	1,808	1,811	1,814	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,3	1,817	1,819	1,822	1,825	1,828	1,830	1,833	1,836	1,838	1,841	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,4	1,844	1,847	1,849	1,852	1,855	1,857	1,860	1,863	1,865	1,868	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,5	1,871	1,873	1,876	1,879	1,881	1,884	1,887	1,889	1,892	1,895	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,6	1,897	1,900	1,903	1,905	1,908	1,910	1,913	1,916	1,918	1,921	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,7	1,924	1,926	1,929	1,931	1,934	1,936	1,939	1,942	1,944	1,947	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,8	1,949	1,952	1,954	1,957	1,960	1,962	1,965	1,967	1,970	1,972	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,9	1,975	1,977	1,980	1,982	1,985	1,987	1,990	1,992	1,995	1,997	0	1	1	1	1	2	2	2	2
4,0	2,000	2,002	2,005	2,007	2,010	2,012	2,015	2,017	2,020	2,022	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,1	2,025	2,027	2,030	2,032	2,035	2,037	2,040	2,042	2,045	2,047	0	0	1	1	1	1	2	2	2

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,2	2,049	2,052	2,054	2,057	2,059	2,062	2,064	2,066	2,069	2,071	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,3	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,086	2,088	2,090	2,093	2,095	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,4	2,098	2,100	2,102	2,105	2,107	2,110	2,112	2,114	2,117	2,119	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,5	2,121	2,124	2,126	2,128	2,131	2,133	2,135	2,138	2,140	2,142	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,6	2,145	2,147	2,149	2,152	2,154	2,156	2,159	2,161	2,163	2,166	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,7	2,168	2,170	2,173	2,175	2,177	2,179	2,182	2,184	2,186	2,189	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,8	2,191	2,193	2,195	2,198	2,200	2,202	2,205	2,207	2,209	2,211	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,9	2,214	2,216	2,218	2,220	2,223	2,225	2,227	2,229	2,232	2,234	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,0	2,236	2,238	2,241	2,243	2,245	2,247	2,249	2,252	2,254	2,256	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,1	2,258	2,261	2,263	2,265	2,267	2,269	2,272	2,274	2,276	2,278	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,2	2,280	2,283	2,285	2,287	2,289	2,291	2,293	2,296	2,298	2,300	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,3	2,302	2,304	2,307	2,309	2,311	2,313	2,315	2,317	2,319	2,322	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,4	2,324	2,326	2,328	2,330	2,332	2,335	2,337	2,339	2,341	2,343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,5	2,345	2,347	2,349	2,352	2,354	2,356	2,358	2,360	2,362	2,364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,6	2,366	2,369	2,371	2,373	2,375	2,377	2,379	2,381	2,383	2,385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,7	2,387	2,390	2,392	2,394	2,396	2,398	2,400	2,402	2,404	2,406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,8	2,408	2,410	2,412	2,415	2,417	2,419	2,421	2,423	2,425	2,427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,9	2,429	2,431	2,433	2,435	2,437	2,439	2,441	2,443	2,445	2,447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,0	2,449	2,452	2,454	2,456	2,458	2,460	2,462	2,464	2,466	2,468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,1	2,470	2,472	2,474	2,476	2,478	2,480	2,482	2,484	2,486	2,488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,2	2,490	2,492	2,494	2,496	2,498	2,500	2,502	2,504	2,506	2,508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,3	2,510	2,512	2,514	2,516	2,518	2,520	2,522	2,524	2,526	2,528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,4	2,530	2,532	2,534	2,536	2,538	2,540	2,542	2,544	2,546	2,548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,5	2,550	2,551	2,553	2,555	2,557	2,559	2,561	2,563	2,565	2,567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,6	2,569	2,571	2,573	2,575	2,577	2,579	2,581	2,583	2,585	2,587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,7	2,588	2,590	2,592	2,594	2,596	2,598	2,600	2,602	2,604	2,606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,8	2,608	2,610	2,612	2,613	2,615	2,617	2,619	2,621	2,623	2,625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,9	2,627	2,629	2,631	2,632	2,634	2,636	2,638	2,640	2,642	2,644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,0	2,646	2,648	2,650	2,651	2,653	2,655	2,657	2,659	2,661	2,663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,1	2,665	2,666	2,668	2,670	2,672	2,674	2,676	2,678	2,680	2,681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,2	2,683	2,685	2,687	2,689	2,691	2,693	2,694	2,696	2,698	2,700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,3	2,702	2,704	2,706	2,707	2,709	2,711	2,713	2,715	2,717	2,718	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,4	2,720	2,722	2,724	2,726	2,728	2,729	2,731	2,733	2,735	2,737	0	0	1	1	1	1	1	1	2

7,5	2,739	2,740	2,742	2,744	2,746	2,748	2,750	2,751	2,753	2,755	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,6	2,757	2,759	2,760	2,762	2,764	2,766	2,768	2,769	2,771	2,773	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,7	2,775	2,777	2,778	2,780	2,782	2,784	2,786	2,787	2,789	2,791	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,8	2,793	2,795	2,796	2,798	2,800	2,802	2,804	2,805	2,807	2,809	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,9	2,811	2,812	2,814	2,816	2,818	2,820	2,821	2,823	2,825	2,827	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,0	2,828	2,830	2,832	2,834	2,835	2,837	2,839	2,841	2,843	2,844	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,1	2,846	2,848	2,850	2,851	2,853	2,855	2,857	2,858	2,860	2,862	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,2	2,864	2,865	2,867	2,869	2,871	2,872	2,874	2,876	2,877	2,879	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,3	2,881	2,883	2,884	2,886	2,888	2,890	2,891	2,893	2,895	2,897	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,4	2,898	2,900	2,902	2,903	2,905	2,907	2,909	2,910	2,912	2,914	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,5	2,915	2,917	2,919	2,921	2,922	2,924	2,926	2,927	2,929	2,931	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,6	2,933	2,934	2,936	2,938	2,939	2,941	2,943	2,944	2,946	2,948	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,7	2,950	2,951	2,953	2,955	2,956	2,958	2,960	2,961	2,963	2,965	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,8	2,966	2,968	2,970	2,972	2,973	2,975	2,977	2,978	2,980	2,982	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,9	2,983	2,985	2,987	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,997	2,998	0	0	1	1	1	1	1	1	2
9,0	3,000	3,002	3,003	3,005	3,007	3,008	3,010	3,012	3,013	3,015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,1	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030	3,032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,2	3,033	3,035	3,036	3,038	3,040	3,041	3,043	3,045	3,046	3,048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,3	3,050	3,051	3,053	3,055	3,056	3,058	3,059	3,061	3,063	3,064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,4	3,066	3,068	3,069	3,071	3,072	3,074	3,076	3,077	3,079	3,081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,5	3,082	3,084	3,085	3,087	3,089	3,090	3,092	3,094	3,095	3,097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,6	3,098	3,100	3,102	3,103	3,105	3,106	3,108	3,110	3,111	3,113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,7	3,114	3,116	3,118	3,119	3,121	3,122	2,124	3,126	3,127	3,129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,8	3,130	3,132	3,134	3,135	3,137	3,138	3,140	3,142	3,143	3,145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,9	3,146	3,148	3,150	3,151	3,153	3,154	3,156	3,158	3,159	3,161	0	0	0	1	1	1	1	1	1
10	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13	3,606	3,619	2,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860	1	3	4	5	7	8	9	11	12
15	3,873	3,886	3,899	3,912	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19	4,359	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461	1	2	3	5	6	7	8	9	10
20	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,561	4,572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21	4,583	4,593	4,604	4,615	4,626	4,637	4,648	4,658	4,669	4,680	1	2	3	4	5	6	8	9	10

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	4,690	4,701	4,712	4,722	4,733	4,743	4,754	4,764	4,775	4,785	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	4,796	4,806	4,817	4,827	4,837	4,848	4,858	4,868	4,879	4,889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	4,899	4,909	4,919	4,930	4,940	4,950	4,960	4,970	4,980	4,990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	5,000	5,010	5,020	5,030	5,040	5,050	5,060	5,070	5,079	5,089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	5,099	5,109	5,119	5,128	5,138	5,148	5,158	5,167	5,177	5,187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	5,196	5,206	5,215	5,225	5,235	5,244	5,254	5,263	5,273	5,282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	5,292	5,301	5,310	5,320	5,329	5,339	5,348	5,357	5,367	5,376	1	2	3	4	5	6	7	8	9
29	5,385	5,394	5,404	5,413	5,422	5,431	5,441	5,450	5,459	5,468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30	5,477	5,486	5,495	5,505	5,514	5,523	5,532	5,541	5,550	5,559	1	2	3	4	4	5	6	7	8
31	5,568	5,577	5,586	5,595	5,604	5,612	5,621	5,630	5,639	5,648	1	2	3	3	4	5	6	7	8
32	5,657	5,666	5,675	5,683	5,692	5,701	5,710	5,718	5,727	5,736	1	2	3	3	4	5	6	7	8
33	5,745	5,753	5,762	5,771	5,779	5,788	5,797	5,805	5,814	5,822	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34	5,831	5,840	5,848	5,857	5,865	5,874	5,882	5,891	5,899	5,908	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35	5,916	5,925	5,933	5,941	5,950	5,958	5,967	5,975	5,983	5,992	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36	6,000	6,008	6,017	6,025	6,033	6,042	6,050	6,058	6,066	6,075	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37	6,083	6,091	6,099	6,107	6,116	6,124	6,132	6,140	6,148	6,156	1	2	2	3	4	5	6	7	7
38	6,164	6,173	6,181	6,189	6,197	6,205	6,213	6,221	6,229	6,237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39	6,245	6,253	6,261	6,269	6,277	6,285	6,293	6,301	6,309	6,317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	6,325	6,332	6,340	6,348	6,356	6,364	6,372	6,380	6,387	6,395	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	6,403	6,411	6,419	6,427	6,434	6,442	6,450	6,458	6,465	6,473	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42	6,481	6,488	6,496	6,504	6,512	6,519	6,527	6,535	6,542	6,550	1	2	2	3	4	5	5	6	7
43	6,557	6,565	6,573	6,580	6,588	6,595	6,603	6,611	6,618	6,626	1	2	2	3	4	5	5	6	7
44	6,633	6,641	6,648	6,656	6,663	6,671	6,678	6,686	6,693	6,701	1	2	2	3	4	5	5	6	7
45	6,708	6,716	6,723	6,731	6,738	6,745	6,753	6,760	6,768	6,775	1	1	2	3	4	4	5	6	7
46	6,782	6,790	6,797	6,804	6,812	6,819	6,826	6,834	6,841	6,848	1	1	2	3	4	4	5	6	7
47	6,856	6,863	6,870	6,877	6,885	6,892	6,899	6,907	6,914	6,921	1	1	2	3	4	4	5	6	7
48	6,928	6,935	6,943	6,950	6,957	6,964	6,971	6,979	6,986	6,993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49	7,000	7,007	7,014	7,021	7,029	7,036	7,043	7,050	7,057	7,064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273	1	1	2	3	3	4	5	6	6
53	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342	1	1	2	3	3	4	5	5	6
54	7,348	7,355	7,362	7,369	7,376	7,382	7,389	7,396	7,403	7,409	1	1	2	3	3	4	5	5	6
55	7,416	7,423	7,430	7,436	7,443	7,450	7,457	7,463	7,470	7,477	1	1	2	3	3	4	5	5	6
56	7,483	7,490	7,497	7,503	7,510	7,517	7,523	7,530	7,537	7,543	1	1	2	3	3	4	5	5	6
57	7,550	7,556	7,563	7,570	7,576	7,583	7,589	7,596	7,603	7,609	1	1	2	3	3	4	5	5	6
58	7,616	7,622	7,629	7,635	7,642	7,649	7,655	7,662	7,668	7,675	1	1	2	3	3	4	5	5	6
59	7,681	7,688	7,694	7,701	7,707	7,714	7,720	7,727	7,733	7,740	1	1	2	3	3	4	4	5	6

60	7,746	7,752	7,759	7,765	7,772	7,778	7,785	7,791	7,797	7,804	1	1	2	3	3	4	4	5	6
61	7,810	7,817	7,823	7,829	7,836	7,842	7,849	7,855	7,861	7,868	1	1	2	3	3	4	4	5	6
62	7,874	7,880	7,887	7,893	7,899	7,906	7,912	7,918	7,925	7,931	1	1	2	3	3	4	4	5	6
63	6,937	7,944	7,950	7,956	7,962	7,969	7,975	7,981	7,987	7,994	1	1	2	3	3	4	4	5	6
64	8,000	8,006	8,012	8,019	8,025	8,031	8,037	8,044	8,050	8,056	1	1	2	2	3	4	4	5	6
65	8,062	8,068	8,075	8,081	8,087	8,093	8,099	8,106	8,112	8,118	1	1	2	2	3	4	4	5	6
66	8,124	8,130	8,136	8,142	8,149	8,155	8,161	8,167	8,173	8,179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67	8,185	8,191	8,198	8,204	8,210	8,216	8,222	8,228	8,234	8,240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68	8,246	8,252	8,258	8,264	8,270	8,276	8,283	8,289	8,295	8,301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69	8,307	8,313	8,319	8,325	8,331	8,337	8,343	8,349	8,355	8,361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70	8,367	8,373	8,379	8,385	8,390	8,396	8,402	8,408	8,414	8,420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71	8,426	8,432	8,438	8,444	8,450	8,456	8,462	8,468	8,473	8,479	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8,485	8,491	8,497	8,503	8,509	8,515	8,521	8,526	8,532	8,538	1	1	2	2	3	3	4	5	5
73	8,544	8,550	8,556	8,562	8,567	8,573	8,579	8,585	8,591	8,597	1	1	2	2	3	3	4	5	5
74	8,602	8,608	8,614	8,620	8,626	8,631	8,637	8,643	8,649	8,654	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75	8,660	8,666	8,672	8,678	8,683	8,689	8,695	8,701	8,706	8,712	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8,718	8,724	8,729	8,735	8,741	8,746	8,752	8,758	8,764	8,769	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8,775	8,781	8,786	8,792	8,798	8,803	8,809	8,815	8,820	9,826	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8,832	8,837	8,843	8,849	8,854	8,860	8,866	8,871	8,877	8,883	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8,888	8,894	8,899	8,905	8,911	8,916	8,922	8,927	8,933	8,939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	8,944	8,950	8,955	8,961	8,967	8,972	8,978	8,983	8,989	8,994	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9,000	9,006	9,011	9,017	9,022	9,028	9,033	9,039	9,044	9,050	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9,055	9,061	9,066	9,072	9,077	9,083	9,088	9,094	9,099	9,105	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9,110	9,116	9,121	9,127	9,132	9,138	9,143	9,149	9,154	9,160	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9,165	9,171	9,176	9,182	9,187	9,192	9,198	9,203	9,209	9,214	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9,220	9,225	9,230	9,236	9,241	9,247	9,252	9,257	9,263	9,268	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9,274	9,279	9,284	9,290	9,295	9,301	9,306	9,311	9,317	9,322	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9,327	9,333	9,338	9,343	9,349	9,354	9,359	9,365	9,370	9,375	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9,381	9,386	9,391	9,397	9,402	9,407	9,413	9,418	9,423	9,429	1	1	2	2	3	3	4	4	5
89	9,434	9,439	9,445	9,450	9,455	9,460	9,466	9,471	9,476	9,482	1	1	2	2	3	3	4	4	5
90	9,487	9,492	9,497	9,503	9,508	9,513	9,518	9,524	9,529	9,534	1	1	2	2	3	3	4	4	5
91	9,539	9,545	9,550	9,555	9,560	9,566	9,571	9,576	9,581	9,586	1	1	2	2	3	3	4	4	5
92	9,592	9,597	9,602	9,607	9,612	9,618	9,623	9,628	9,633	9,638	1	1	2	2	3	3	4	4	5
93	9,644	9,649	9,654	9,659	9,664	9,670	9,675	9,680	9,685	9,690	1	1	2	2	3	3	4	4	5
94	9,695	9,701	9,706	9,711	9,716	9,721	9,726	9,731	9,737	9,742	1	1	2	2	3	3	4	4	5
95	9,747	9,752	9,757	9,762	9,767	9,772	9,778	9,783	9,788	9,793	1	1	2	2	3	3	4	4	5
96	9,798	9,803	9,808	9,813	9,818	9,823	9,829	9,834	9,839	9,844	1	1	2	2	3	3	4	4	5
97	9,849	9,854	9,859	9,864	9,869	9,874	9,879	9,884	9,889	9,894	1	1	1	2	3	3	4	4	5
98	9,899	9,905	9,910	9,915	9,920	9,925	9,930	9,935	9,940	9,945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9,950	9,955	9,960	9,965	9,970	9,975	9,980	9,985	9,990	9,995	0	1	1	2	2	3	3	4	4

§ 7. Кубы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
1,00	1,000	1,003	1,006	1,009	1,012	1,015	1,018	1,021	1,024	1,027	0	1	1	1	2
1,01	1,030	1,033	1,036	1,040	1,043	1,046	1,049	1,052	1,055	1,058	0	1	1	1	2
1,02	1,061	1,064	1,067	1,071	1,074	1,077	1,080	1,083	1,086	1,090	0	1	1	1	2
1,03	1,093	1,096	1,099	1,102	1,106	1,109	1,112	1,115	1,118	1,122	0	1	1	1	2
1,04	1,125	1,128	1,131	1,135	1,138	1,141	1,144	1,148	1,151	1,154	0	1	1	1	2
1,05	1,158	1,161	1,164	1,168	1,171	1,174	1,178	1,181	1,184	1,188	0	1	1	1	2
1,06	1,191	1,194	1,198	1,201	1,205	1,208	1,211	1,215	1,218	1,222	0	1	1	1	2
1,07	1,225	1,228	1,232	1,235	1,239	1,242	1,246	1,249	1,253	1,256	0	1	1	1	2
1,08	1,260	1,263	1,267	1,270	1,274	1,277	1,281	1,284	1,288	1,291	0	1	1	1	2
1,09	1,295	1,299	1,302	1,306	1,309	1,313	1,317	1,320	1,324	1,327	0	1	1	1	2
1,10	1,331	1,335	1,338	1,342	1,346	1,349	1,353	1,357	1,360	1,364	0	1	1	1	2
1,11	1,368	1,371	1,375	1,379	1,382	1,386	1,390	1,394	1,397	1,401	0	1	1	1	2
1,12	1,405	1,409	1,412	1,416	1,420	1,424	1,428	1,431	1,435	1,439	0	1	1	2	2
1,13	1,443	1,447	1,451	1,454	1,458	1,462	1,466	1,470	1,474	1,478	0	1	1	2	2
1,14	1,482	1,485	1,489	1,493	1,497	1,501	1,505	1,509	1,513	1,517	0	1	1	2	2
1,15	1,521	1,525	1,529	1,533	1,537	1,541	1,545	1,549	1,553	1,557	0	1	1	2	2
1,16	1,561	1,565	1,569	1,573	1,577	1,581	1,585	1,589	1,593	1,598	0	1	1	2	2
1,17	1,602	1,606	1,610	1,614	1,618	1,622	1,626	1,631	1,635	1,639	0	1	1	2	2
1,18	1,643	1,647	1,651	1,656	1,660	1,664	1,668	1,672	1,677	1,681	0	1	1	2	2
1,19	1,685	1,689	1,694	1,698	1,702	1,706	1,711	1,715	1,719	1,724	0	1	1	2	2
1,20	1,728	1,732	1,737	1,741	1,745	1,750	1,754	1,758	1,763	1,767	0	1	1	2	2
1,21	1,772	1,776	1,780	1,785	1,789	1,794	1,798	1,802	1,807	1,811	0	1	1	2	2
1,22	1,816	1,820	1,825	1,829	1,834	1,838	1,843	1,847	1,852	1,856	0	1	1	2	2
1,23	1,861	1,865	1,870	1,875	1,879	1,884	1,888	1,893	1,897	1,902	0	1	1	2	2
1,24	1,907	1,911	1,916	1,920	1,925	1,930	1,934	1,939	1,944	1,948	0	1	1	2	2
1,25	1,953	1,958	1,963	1,967	1,972	1,977	1,981	1,986	1,991	1,996	0	1	1	2	2
1,26	2,000	2,005	2,010	2,015	2,019	2,024	2,029	2,034	2,039	2,044	0	1	1	2	2
1,27	2,048	2,053	2,058	2,063	2,068	2,073	2,078	2,082	2,087	2,092	0	1	1	2	2
1,28	2,097	2,102	2,107	2,112	2,117	2,122	2,127	2,132	2,137	2,142	0	1	1	2	2
1,29	2,147	2,152	2,157	2,162	2,167	2,172	2,177	2,182	2,187	2,192	1	1	1	2	3
1,30	2,197	2,202	2,207	2,212	2,217	2,222	2,228	2,233	2,238	2,243	1	1	2	2	3
1,31	2,248	2,253	2,258	2,264	2,269	2,274	2,279	2,284	2,290	2,295	1	1	2	2	3

1,32	2,300	2,305	2,310	2,316	2,321	2,326	2,331	2,337	2,342	2,347	1	1	2	2	3
1,33	2,353	2,358	2,363	2,369	2,374	2,379	2,385	2,390	2,395	2,401	1	1	2	2	3
1,34	2,406	2,411	2,417	2,422	2,428	2,433	2,439	2,444	2,449	2,455	1	1	2	2	3
1,35	2,460	2,466	2,471	2,477	2,482	2,488	2,493	2,499	2,504	2,510	1	1	2	2	3
1,36	2,515	2,521	2,527	2,532	2,538	2,543	2,549	2,554	2,560	2,566	1	1	2	2	3
1,37	2,571	2,577	2,583	2,588	2,594	2,600	2,605	2,611	2,617	2,622	1	1	2	2	3
1,38	2,628	2,634	2,640	2,645	2,651	2,657	2,663	2,668	2,674	2,680	1	1	2	2	3
1,39	2,686	2,691	2,697	2,703	2,709	2,715	2,721	2,726	2,732	2,738	1	1	2	2	3
1,40	2,744	2,750	2,756	2,762	2,768	2,774	2,779	2,785	2,791	2,797	1	1	2	2	3
1,41	2,803	2,809	2,815	2,821	2,827	2,833	2,839	2,845	2,851	2,857	1	1	2	2	3
1,42	2,863	2,869	2,875	2,881	2,888	2,894	2,900	2,906	2,912	2,918	1	1	2	2	3
1,43	2,924	2,930	2,936	2,943	2,949	2,955	2,961	2,967	2,974	2,980	1	1	2	2	3
1,44	2,986	2,992	2,998	3,005	3,011	3,017	3,023	3,030	3,036	3,042	1	1	2	3	3
1,45	3,049	3,055	3,061	3,068	3,074	3,080	3,087	3,093	3,099	3,106	1	1	2	3	3
1,46	3,112	3,119	3,125	3,131	3,138	3,144	3,151	3,157	3,164	3,170	1	1	2	3	3
1,47	3,177	3,183	3,190	3,196	3,203	3,209	3,216	3,222	3,229	3,235	1	1	2	3	3
1,48	3,242	3,248	3,255	3,262	3,268	3,275	3,281	3,288	3,295	3,301	1	1	2	3	3
1,49	3,308	3,315	3,321	3,328	3,335	3,341	3,348	3,355	3,362	3,368	1	1	2	3	3
1,50	3,375	3,382	3,389	3,395	3,402	3,409	3,416	3,422	3,429	3,436	1	1	2	3	3
1,51	3,443	3,450	3,457	3,464	3,470	3,477	3,484	3,491	3,498	3,505	1	1	2	3	3
1,52	3,512	3,519	3,526	3,533	3,540	3,547	3,554	3,561	3,568	3,575	1	1	2	3	3
1,53	3,582	3,589	3,596	3,603	3,610	3,617	3,624	3,631	3,638	3,645	1	1	2	3	4
1,54	3,652	3,659	3,667	3,674	3,681	3,688	3,695	3,702	3,709	3,717	1	1	2	3	4
1,55	3,724	3,731	3,738	3,746	3,753	3,760	3,767	3,775	3,782	3,789	1	1	2	3	4
1,56	3,796	3,804	3,811	3,818	3,826	3,833	3,840	3,848	3,855	3,863	1	1	2	3	4
1,57	3,870	3,877	3,885	3,892	3,900	3,907	3,914	3,922	3,929	3,937	1	1	2	3	4
1,58	3,944	3,952	3,959	3,967	3,974	3,982	3,989	3,997	4,005	4,012	1	2	2	3	4
1,59	4,020	4,027	4,035	4,042	4,050	4,058	4,065	4,073	4,081	4,088	1	2	2	3	4
1,60	4,096	4,104	4,111	4,119	4,127	4,135	4,142	4,150	4,158	4,166	1	2	2	3	4
1,61	4,173	4,181	4,189	4,197	4,204	4,212	4,220	4,228	4,236	4,244	1	2	2	3	4
1,62	4,252	4,259	4,267	4,275	4,283	4,291	4,299	4,307	4,315	4,323	1	2	2	3	4
1,63	4,331	4,339	4,347	4,355	4,363	4,371	4,379	4,387	4,395	4,403	1	2	2	3	4
1,64	4,411	4,419	4,427	4,435	4,443	4,451	4,460	4,468	4,476	4,484	1	2	2	3	4
1,65	4,492	4,500	4,508	4,517	4,525	4,533	4,541	4,550	4,558	4,566	1	2	2	3	4
1,66	4,574	4,583	4,591	4,599	4,607	4,616	4,624	4,632	4,641	4,649	1	2	2	3	4

Продолжение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
1,67	4,657	4,666	4,674	4,683	4,691	4,699	4,708	4,716	4,725	4,733	1	2	3	3	4
1,68	4,742	4,750	4,759	4,767	4,776	4,784	4,793	4,801	4,810	4,818	1	2	3	3	4
1,69	4,827	4,835	4,844	4,853	4,861	4,870	4,878	4,887	4,896	4,904	1	2	3	3	4
1,70	4,913	4,922	4,930	4,939	4,948	4,956	4,965	4,974	4,983	4,991	1	2	3	3	4
1,71	5,000	5,009	5,018	5,027	5,035	5,044	5,053	5,062	5,071	5,080	1	2	3	4	4
1,72	5,088	5,097	5,106	5,115	5,124	5,133	5,142	5,151	5,160	5,169	1	2	3	4	4
1,73	5,178	5,187	5,196	5,205	5,214	5,223	5,232	5,241	5,250	5,259	1	2	3	4	5
1,74	5,268	5,277	5,286	5,295	5,304	5,314	5,323	5,332	5,341	5,350	1	2	3	4	5
1,75	5,359	5,369	5,378	5,387	5,396	5,405	5,415	5,424	5,433	5,442	1	2	3	4	5
1,76	5,452	5,461	5,470	5,480	5,489	5,498	5,508	5,517	5,526	5,536	1	2	3	4	5
1,77	5,545	5,555	5,564	5,573	5,583	5,592	5,602	5,611	5,621	5,630	1	2	3	4	5
1,78	5,640	5,649	5,659	5,668	5,678	5,687	5,697	5,707	5,716	5,726	1	2	3	4	5
1,79	5,735	5,745	5,755	5,764	5,774	5,784	5,793	5,803	5,813	5,822	1	2	3	4	5
1,80	5,832	5,842	5,851	5,861	5,871	5,881	5,891	5,900	5,910	5,920	1	2	3	4	5
1,81	5,930	5,940	5,949	5,959	5,969	5,979	5,989	5,999	6,009	6,019	1	2	3	4	5
1,82	6,029	6,039	6,048	6,058	6,068	6,078	6,088	6,098	6,108	6,118	1	2	3	4	5
1,83	6,128	6,139	6,149	6,159	6,169	6,179	6,189	6,199	6,209	6,219	1	2	3	4	5
1,84	6,230	6,240	6,250	6,260	6,270	6,280	6,291	6,301	6,311	6,321	1	2	3	4	5
1,85	6,332	6,342	6,352	6,362	6,373	6,383	6,393	6,404	6,414	6,424	1	2	3	4	5
1,86	6,435	6,445	6,456	6,466	6,476	6,487	6,497	6,508	6,518	6,529	1	2	3	4	5
1,87	6,539	6,550	6,560	6,571	6,581	6,592	6,602	6,613	6,623	6,634	1	2	3	4	5
1,88	6,645	6,655	6,666	6,677	6,687	6,698	6,708	6,719	6,730	7,741	1	2	3	4	5
1,89	6,751	6,762	6,773	6,783	6,794	6,805	6,816	6,827	6,837	6,848	1	2	3	4	5
1,90	6,859	6,870	6,881	6,892	6,902	6,913	6,924	6,935	6,946	6,957	1	2	3	4	5
1,91	6,968	6,979	6,990	7,001	7,012	7,023	7,034	7,045	7,056	7,067	1	2	3	4	6
1,92	7,078	7,089	7,100	7,111	7,122	7,133	7,144	7,156	7,167	7,178	1	2	3	4	6
1,93	7,189	7,200	7,211	7,223	7,234	7,245	7,256	7,268	7,279	7,290	1	2	3	4	6
1,94	7,301	7,313	7,324	7,335	7,347	7,358	7,369	7,381	7,392	7,403	1	2	3	5	6
1,95	7,415	7,426	7,438	7,449	7,461	7,472	7,484	7,495	7,507	7,518	1	2	3	5	6
1,96	7,530	7,541	7,553	7,564	7,576	7,587	7,599	7,610	7,622	7,634	1	2	3	5	6
1,97	7,645	7,657	7,669	7,680	7,692	7,704	7,715	7,727	7,739	7,751	1	2	4	5	6
1,98	7,762	7,774	7,786	7,798	7,810	7,821	7,833	7,845	7,857	7,869	1	2	4	5	6
1,99	7,881	7,892	7,904	7,916	7,928	7,940	7,952	7,964	7,976	7,988	1	2	4	5	6

2,00	8,000	8,012	8,024	8,036	8,048	8,060	8,072	8,084	8,096	8,108	1	2	4	5	6
2,01	8,121	8,133	8,145	8,157	8,169	8,181	8,194	8,206	8,218	8,230	1	2	4	5	6
2,02	8,242	8,255	8,267	8,279	8,291	8,304	8,316	8,328	8,341	8,353	1	2	4	5	6
2,03	8,365	8,378	8,390	8,403	8,415	8,427	8,440	8,452	8,465	8,477	1	2	4	5	6
2,04	8,490	8,502	8,515	8,527	8,540	8,552	8,565	8,577	8,590	8,603	1	3	4	5	6
2,05	8,615	8,628	8,640	8,653	8,666	8,678	8,691	8,704	8,716	8,729	1	3	4	5	6
2,06	8,742	8,755	8,767	8,780	8,793	8,806	8,818	8,831	8,844	8,857	1	3	4	5	6
2,07	8,870	8,883	8,895	8,908	8,921	8,934	8,947	8,960	8,973	8,986	1	3	4	5	6
2,08	8,999	9,012	9,025	9,038	9,051	9,064	9,077	9,090	9,103	9,116	1	3	4	5	7
2,09	9,129	9,142	9,156	9,169	9,182	9,195	9,208	9,221	9,235	9,248	1	3	4	5	7
2,10	9,261	9,274	9,287	9,301	9,314	9,327	9,341	9,354	9,367	9,381	1	3	4	5	7
2,11	9,394	9,407	9,421	9,434	9,447	9,461	9,474	9,488	9,501	9,515	1	3	4	5	7
2,12	9,528	9,542	9,555	9,569	9,582	9,596	9,609	9,623	9,636	9,650	1	3	4	5	7
2,13	9,664	9,677	9,691	9,704	9,718	9,732	9,745	9,759	9,773	9,787	1	3	4	5	7
2,14	9,800	9,814	9,828	9,842	9,855	9,869	9,883	9,897	9,911	9,925	1	3	4	6	7
2,15	9,938	9,952	9,966	9,980	9,994	10,008	10,022	10,036	10,050	10,064	1	3	4	6	7
2,1							10,08	10,22	10,36	10,50	1	3	4	6	7
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01	2	3	5	6	8
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65	2	3	5	7	8
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44	2	4	5	7	9
2,5	15,62	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37	2	4	6	8	10
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47	2	4	6	8	11
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72	2	5	7	9	11
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14	2	5	7	10	12
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73	3	5	8	10	13
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50	3	6	8	11	14
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46	3	6	9	12	15
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61	3	6	10	13	16
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96	3	7	10	13	17
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51	4	7	11	14	18
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27	4	8	11	15	19
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24	4	8	12	16	20
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44	4	8	13	17	21
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86	4	9	13	18	22
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52	5	9	14	19	23

Продолжение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42	5	10	15	20	25
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56	5	10	16	21	26
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95	5	11	16	22	27
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60	6	11	17	23	28
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52	6	12	18	24	30
4,5	91,12	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70	6	12	19	25	31
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,54	101,19	101,85	102,50	103,16	6	13	19	26	32
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9	1	1	2	3	3
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9	1	1	2	3	4
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3	1	1	2	3	4
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9	1	2	2	3	4
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8	1	2	2	3	4
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0	1	2	2	3	4
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6	1	2	3	3	4
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5	1	2	3	4	4
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7	1	2	3	4	5
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2	1	2	3	4	5
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1	1	2	3	4	5
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3	1	2	3	4	5
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9	1	2	3	4	5
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9	1	2	3	4	5
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2	1	2	3	5	6
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9	1	2	4	5	6
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9	1	2	4	5	6
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4	1	2	4	5	6
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2	1	3	4	5	6
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4	1	3	4	5	7
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0	1	3	4	5	7
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1	1	3	4	6	7
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5	1	3	4	6	7

7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4	1	3	4	6	7
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7	2	3	5	6	8
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4	2	3	5	6	8
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6	2	3	5	6	8
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2	2	3	5	7	8
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2	2	3	5	7	9
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8	2	4	5	7	9
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7	2	4	5	7	9
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2	2	4	6	7	9
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1	2	4	6	8	9
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5	2	4	6	8	10
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4	2	4	6	8	10
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7	2	4	6	8	10
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6	2	4	6	8	10
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0	2	4	6	9	11
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8	2	4	7	9	11
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2	2	4	7	9	11
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2	2	5	7	9	11
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6	2	5	7	9	12
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6	2	5	7	10	12
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1	2	5	7	10	12
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2	3	5	8	10	13
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8	3	5	8	10	13
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9	3	5	8	10	13
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7	3	5	8	11	13
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0	3	5	8	11	14
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9	3	6	8	11	14
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3	3	6	9	11	14
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4	3	6	9	12	15
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0	3	6	9	12	15
10,0	1000,0										3	6	9	12	15

§ 8. Значения дробей вида $\frac{1}{n}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Отнимать, а не прибавлять!								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	9990	9980	9970	9960	9950	9940	9930	9921	9911	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,01	0,9901	9891	9881	9872	9862	9852	9843	9833	9823	9814	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,02	0,9804	9794	9785	9775	9766	9756	9747	9737	9728	9718	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,03	0,9709	9699	9690	9681	9671	9662	9653	9643	9634	9625	1	2	3	4	5	6	7	8	8
1,04	0,9615	9606	9597	9588	9579	9569	9560	9551	9542	9533	1	2	3	4	5	5	6	7	8
1,05	0,9524	9515	9506	9497	9488	9479	9470	9461	9452	9443	1	2	3	4	4	5	6	7	8
1,06	0,9434	9425	9416	9407	9398	9390	9381	9372	9363	9355	1	2	3	4	4	5	6	7	8
1,07	0,9346	9337	9328	9320	9311	9302	9294	9285	9276	9268	1	2	3	3	4	5	6	7	8
1,08	0,9259	9251	9242	9234	9225	9217	9208	9200	9191	9183	1	2	3	3	4	5	6	7	8
1,09	0,9174	9166	9158	9149	9141	9132	9124	9116	9107	9099	1	2	3	3	4	5	6	7	8
1,10	0,9091	9083	9074	9066	9058	9050	9042	9033	9025	9017	1	2	2	3	4	5	6	7	7
1,11	0,9009	9001	8993	8985	8977	8969	8961	8953	8945	8937	1	2	2	3	4	5	6	6	7
1,12	0,8929	8921	8913	8905	8897	8889	8881	8873	8865	8857	1	2	2	3	4	5	6	6	7
1,13	0,8850	8842	8834	8826	8818	8811	8803	8795	8787	8780	1	2	2	3	4	5	5	6	7
1,14	0,8772	8764	8757	8749	8741	8734	8726	8718	8711	8703	1	2	2	3	4	5	5	6	7
1,15	0,8696	8688	8681	8673	8666	8658	8651	8643	8636	8628	1	1	2	3	4	4	5	6	7
1,16	0,8621	8613	8606	8598	8591	8584	8576	8569	8562	8554	1	1	2	3	4	4	5	6	7
1,17	0,8547	8540	8532	8525	8518	8511	8503	8496	8489	8482	1	1	2	3	4	4	5	6	7
1,18	0,8475	8467	8460	8453	8446	8439	8432	8425	8418	8410	1	1	2	3	4	4	5	6	6
1,19	0,8403	8396	8389	8382	8375	8368	8361	8354	8347	8340	1	1	2	3	4	4	5	6	6
1,20	0,8333	8326	8319	8313	8306	8299	8292	8285	8278	8271	1	1	2	3	3	4	5	6	6
1,21	0,8264	8258	8251	8244	8237	8230	8224	8217	8210	8203	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,22	0,8197	8190	8183	8177	8170	8163	8157	8150	8143	8137	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,23	0,8130	8123	8117	8110	8104	8097	8091	8084	8078	8071	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,24	0,8065	8058	8052	8045	8039	8032	8026	8019	8013	8006	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,25	0,8000	7994	7987	7981	7974	7968	7962	7955	7949	7943	1	1	2	3	3	4	4	5	6
1,26	0,7937	7930	7924	7918	7911	7905	7899	7893	7886	7880	1	1	2	2	3	4	4	5	6
1,27	0,7874	7868	7862	7855	7849	7843	7837	7831	7825	7819	1	1	2	2	3	4	4	5	6
1,28	0,7812	7806	7800	7794	7788	7782	7776	7770	7764	7758	1	1	2	2	3	4	4	5	5
1,29	0,7752	7746	7740	7734	7728	7722	7716	7710	7704	7698	1	1	2	2	3	4	4	5	5

1,30	0,7692	7686	7680	7675	7669	7663	7657	7651	7645	7639	1	1	2	2	3	4	4	5	5
1,31	0,7634	7628	7622	7616	7610	7605	7599	7593	7587	7582	1	1	2	2	3	3	4	5	5
1,32	0,7576	7570	7564	7559	7553	7547	7541	7536	7530	7524	1	1	2	2	3	3	4	5	5
1,33	0,7519	7513	7508	7502	7496	7491	7485	7479	7474	7468	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,34	0,7463	7457	7452	7446	7440	7435	7429	7424	7418	7413	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,35	0,7407	7402	7396	7391	7386	7380	7375	7369	7364	7358	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,36	0,7353	7348	7342	7337	7331	7326	7321	7315	7310	7305	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,37	0,7299	7294	7289	7283	7278	7273	7267	7262	7257	7252	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,38	0,7246	7241	7236	7231	7225	7220	7215	7210	7205	7199	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,39	0,7194	7189	7184	7179	7174	7168	7163	7158	7153	7148	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,40	0,7143	7138	7133	7128	7123	7117	7112	7107	7102	7097	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,41	0,7092	7087	7082	7077	7072	7067	7062	7057	7052	7047	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,42	0,7042	7037	7032	7027	7022	7018	7013	7008	7003	6998	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,43	0,6993	6988	6983	6978	6974	6969	6964	6959	6954	6949	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,44	0,6944	6940	6935	6930	6925	6920	6916	6911	6906	6901	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,45	0,6897	6892	6887	6882	6878	6873	6868	6863	6859	6854	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,46	0,6849	6845	6840	6835	6831	6826	6821	6817	6812	6807	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,47	0,6803	6798	6793	6789	6784	6780	6775	6770	6766	6761	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,48	0,6757	6752	6748	6743	6739	6734	6729	6725	6720	6716	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,49	0,6711	6707	6702	6698	6693	6689	6684	6680	6676	6671	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,50	0,6667	6662	6658	6653	6649	6645	6640	6636	6631	6627	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,51	0,6623	6618	6614	6609	6605	6601	6596	6592	6588	6583	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,52	0,6579	6575	6570	6566	6562	6557	6553	6549	6545	6540	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,53	0,6536	6532	6527	6523	6519	6515	6510	6506	6502	6498	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,54	0,6494	6489	6485	6481	6477	6472	6468	6464	6460	6456	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,55	0,6452	6447	6443	6439	6435	6431	6427	6423	6418	6414	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,56	0,6410	6406	6402	6398	6394	6390	6386	6382	6378	6373	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,57	0,6369	6365	6361	6357	6353	6349	6345	6341	6337	6333	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,58	0,6329	6325	6321	6317	6313	6309	6305	6301	6297	6293	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,59	0,6289	6285	6281	6277	6274	6270	6266	6262	6258	6254	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,60	0,6250	6246	6242	6238	6234	6231	6227	6223	6219	6215	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,61	0,6211	6207	6203	6200	6196	6192	6188	6184	6180	6177	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,62	0,6173	6169	6165	6161	6158	6154	6150	6146	6143	6139	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,63	0,6135	6131	6127	6124	6120	6116	6112	6109	6105	6101	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,64	0,6098	6094	6090	6086	6083	6079	6075	6072	6068	6064	0	1	1	1	2	2	3	3	3

Продолжение

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Отнимать, а не прибавлять!								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,65	0,6061	6057	6053	6050	6046	6042	6039	6035	6031	6028	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,66	0,6024	6020	6017	6013	6010	6006	6002	5999	5995	5992	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,67	0,5988	5984	5981	5977	5974	5970	5967	5963	5959	5956	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,68	0,5952	5949	5945	5942	5938	5935	5931	5928	5924	5921	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,69	0,5917	5914	5910	5907	5903	5900	5896	5893	5889	5886	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,70	0,5882	5879	5875	5872	5869	5865	5862	5858	5855	5851	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,71	0,5848	5845	5841	5838	5834	5831	5828	5824	5821	5817	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,72	0,5814	5811	5807	5804	5800	5797	5794	5790	5787	5784	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,73	0,5780	5777	5774	5770	5767	5764	5760	5757	5754	5750	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,74	0,5747	5744	5741	5737	5734	5731	5727	5724	5721	5718	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,75	0,5714	5711	5708	5705	5701	5698	5695	5692	5688	5685	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,76	0,5682	5679	5675	5672	5669	5666	5663	5659	5656	5653	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,77	0,5650	5647	5643	5640	5637	5634	5631	5627	5624	5621	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,78	0,5618	5615	5612	5609	5605	5602	5599	5596	5593	5590	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,79	0,5587	5583	5580	5577	5574	5571	5568	5565	5562	5559	0	1	1	1	2	2	2	2	3
1,8	0,5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	18	20	23	26
1,9	0,5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2,0	0,5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2,1	0,4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	6	9	11	13	15	17	19
2,2	0,4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2,3	0,4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2,4	0,4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2,5	0,4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2,6	0,3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	9	10	11	13
2,7	0,3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2,8	0,3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2,9	0,3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3,0	0,3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	8	9	10
3,1	0,3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,2	0,3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3,3	0,3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3,4	0,2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3,5	0,2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3,6	0,2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,7	0,2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,8	0,2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,9	0,2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4,0	0,2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4,1	0,2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4,2	0,2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4,3	0,2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4,4	0,2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4,5	0,2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4,6	0,2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4,7	0,2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4,8	0,2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4,9	0,2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5,0	0,2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5,1	0,1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5,2	0,1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5,3	0,1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,4	0,1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,5	0,1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,6	0,1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,7	0,1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5,8	0,1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5,9	0,1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6,0	0,1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6,1	0,1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6,2	0,1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6,3	0,1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,4	0,1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,5	0,1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,6	0,1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,7	0,1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,8	0,1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,9	0,1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0	0	1	1	1	1	2	2	2

Продолжение

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Отнимать, а не прибавлять!								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,0	0,1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,1	0,1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,2	0,1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,3	0,1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,4	0,1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,5	0,1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,6	0,1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,7	0,1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7,8	0,1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7,9	0,1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,0	0,1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,1	0,1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,2	0,1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,3	0,1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,4	0,1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,5	0,1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,6	0,1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,7	0,1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,8	0,1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,9	0,1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,0	0,1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,1	0,1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,2	0,1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,3	0,1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,4	0,1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,5	0,1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,6	0,1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,7	0,1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,8	0,1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,9	0,1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0	0	0	0	0	1	1	1	1

§ 9. Десятичные логарифмы *

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	9	13	17	22	26	30	35	39
											4	9	13	17	21	25	30	34	38
											4	8	12	16	21	25	29	33	37
											4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	12	16	20	24	27	31	35
											4	8	11	15	19	23	27	30	34
											4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	11	14	18	21	25	28	32
											4	7	11	14	17	21	24	28	31
											3	7	10	14	17	20	24	27	30
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	17	20	23	27	30
											3	6	10	13	16	19	23	26	29
											3	6	9	13	16	19	22	25	28
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	13	16	19	22	25	28
											3	6	9	12	15	18	21	24	27
											3	6	9	11	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	9	11	14	17	20	23	26
											3	5	8	11	14	16	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	19	21	24
											3	5	8	10	13	15	18	20	23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	13	15	18	20	23
											2	5	7	10	12	15	17	19	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
											2	5	7	9	11	13	16	18	20
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
											2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
											2	4	6	8	10	12	14	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16

* Как пользоваться таблицей см. стр. 327.

Продолжение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7

60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9686	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

§ 10. Антилогарифмы *

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
,12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
,13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
,20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
,21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
,22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
,23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,31	2042	2062	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4

,33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
,40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
,41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
,42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
,43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
,44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
,45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
,49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
,50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	2	4	4	5	6	7
,51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
,52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
,53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
,54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
,55	3548	3556	3565	3573	3581	3689	3697	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
,56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
,57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
,58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
,59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	6	6	7	8
,60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
,61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10

* Как пользоваться таблицей см. стр. 328.

Продолжение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
,68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
,69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
,70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
,71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
,72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
,73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
,74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
,75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
,76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
,77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
,78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
,79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
,80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
,81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
,82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
,83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
,84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
,85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
,86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
,87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
,88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
,89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
,90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
,91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
,92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
,93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
,94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
,95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
,96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
,97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
,98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
,99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

§ 11. Факториалы

n	$n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$	n	$n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$
0	1		
1	1	11	399 16800
2	2	12	4790 01600
3	6	13	62270 20800
4	24	14	8 71782 91200
5	120	15	130 76743 68000
6	720	16	2092 27898 88000
7	5040	17	35568 74280 96000
8	40 320	18	6 40237 37057 28000
9	362 880	19	121 64510 04088 32000
10	3 628 800	20	2432 90200 81766 40000

§ 12. Биномиальные коэффициенты

n	$C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^n$
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

2	151	353	577	811	1049	1297	1559	1823	2089	2377
3	157	359	587	821	1051	1301	1567	1831	2099	2381
5	163	367	593	823	1061	1303	1571	1847	2111	2383
7	167	373	599	827	1063	1307	1579	1861	2113	2389
11	173	379	601	829	1069	1319	1583	1867	2129	2393
13	179	383	607	839	1087	1321	1597	1871	2131	2399
17	181	389	613	853	1091	1327	1601	1873	2137	2411
19	191	397	617	857	1093	1361	1607	1877	2141	2417
23	193	401	619	859	1097	1367	1609	1879	2143	2423
29	197	409	631	863	1103	1373	1613	1889	2153	2437
31	199	419	641	877	1109	1381	1619	1901	2161	2441
37	211	421	643	881	1117	1399	1621	1907	2179	2447
41	223	431	647	883	1123	1409	1627	1913	2203	2459
43	227	433	653	887	1129	1423	1637	1931	2207	2467
47	229	439	659	907	1151	1427	1657	1933	2213	2473
53	233	443	661	911	1153	1429	1663	1949	2221	2477
59	239	449	673	919	1163	1433	1667	1951	2237	2503
61	241	457	677	929	1171	1439	1669	1973	2239	2521
67	251	461	683	937	1181	1447	1693	1979	2243	2531
71	257	463	691	941	1187	1451	1697	1987	2251	2539
73	263	467	701	949	1193	1453	1699	1993	2267	2543
79	269	479	709	953	1201	1459	1709	1997	2269	2549
83	271	487	719	967	1213	1471	1721	1999	2273	2551
89	277	491	727	971	1217	1481	1723	2003	2281	2557
97	281	499	733	977	1223	1483	1733	2011	2287	2579
101	283	503	739	983	1229	1487	1741	2017	2293	2591
103	293	509	743	991	1231	1489	1747	2027	2297	2593
107	307	521	751	997	1237	1493	1753	2029	2309	2609
109	311	523	757	1009	1249	1499	1759	2039	2311	2617
113	313	541	761	1013	1259	1511	1777	2053	2333	2621
127	317	547	769	1019	1277	1523	1783	2063	2339	2633
131	331	557	773	1021	1279	1531	1787	2069	2341	2647
137	337	563	787	1031	1283	1543	1789	2081	2347	2657
139	347	569	797	1033	1289	1549	1801	2083	2351	2659
149	349	571	809	1039	1291	1553	1811	2087	2357	2663
									2371	2671

превосходящие 6000

2677	2939	3257	3541	3833	4129	4447	4751	5051	5399	5683
2683	2953	3259	3547	3847	4133	4451	4759	5059	5407	5689
2687	2957	3271	3557	3851	4139	4457	4783	5077	5413	5693
2689	2963	3299	3559	3853	4153	4463	4787	5081	5417	5701
2693	2969	3301	3571	3863	4157	4481	4789	5087	5419	5711
2699	2971	3307	3581	3877	4159	4483	4793	5099	5431	5717
2707	2999	3313	3583	3881	4177	4493	4799	5101	5437	5737
2711	3001	3319	3593	3889	4201	4507	4801	5107	5441	5741
2713	3011	3323	3607	3907	4211	4513	4813	5113	5443	5743
2719	3019	3329	3613	3911	4217	4517	4817	5119	5449	5749
2729	3023	3331	3617	3917	4219	4519	4831	5147	5471	5779
2731	3037	3343	3623	3919	4229	4523	4861	5153	5477	5783
2741	3041	3347	3631	3923	4231	4547	4871	5167	5479	5791
2749	3049	3359	3637	3929	4241	4549	4877	5171	5483	5801
2753	3061	3361	3643	3931	4243	4561	4889	5179	5501	5807
2767	3067	3371	3659	3943	4253	4567	4903	5189	5503	5813
2777	3079	3373	3671	3947	4259	4583	4909	5197	5507	5821
2789	3083	3389	3673	3967	4261	4591	4919	5209	5519	5827
2791	3089	3391	3677	3989	4271	4597	4931	5227	5521	5839
2797	3109	3407	3691	4001	4273	4603	4933	5231	5527	5843
2801	3119	3413	3697	4003	4283	4621	4937	5233	5531	5849
2803	3121	3433	3701	4007	4289	4637	4943	5237	5557	5851
2819	3137	3449	3709	4013	4297	4639	4951	5261	5563	5857
2833	3163	3457	3719	4019	4327	4643	4957	5273	5569	5861
2837	3167	3461	3727	4021	4337	4649	4967	5279	5573	5867
2843	3169	3463	3733	4027	4339	4651	4969	5281	5581	5869
2851	3181	3467	3739	4049	4349	4657	4973	5297	5591	5879
2857	3187	3469	3761	4051	4357	4663	4987	5303	5623	5881
2861	3191	3491	3767	4057	4363	4673	4993	5309	5639	5897
2879	3203	3499	3769	4073	4373	4679	4999	5323	5641	5903
2887	3209	3511	3779	4079	4391	4691	5003	5333	5647	5923
2897	3217	3517	3793	4091	4397	4703	5009	5347	5651	5927
2903	3221	3527	3797	4093	4409	4721	5011	5351	5653	5939
2909	3229	3529	3803	4099	4421	4723	5021	5381	5657	5953
2917	3251	3533	3821	4111	4423	4729	5023	5387	5659	5981
2927	3253	3539	3823	4127	4441	4733	5039	5393	5669	5987

II. АРИФМЕТИКА

ПРЕДМЕТ АРИФМЕТИКИ

Арифметика — наука о числах. Название «арифметика» произошло от греческого слова ἀριθμητικη, состоящего из двух частей: ἀριθμος — число и τεχνη — искусство. Арифметика, как и многие другие науки, возникла из потребностей практической деятельности людей. Еще задолго до нашей эры у людей возникла необходимость подсчитывать количество добычи, вести счет времени и т. п. Несомненно, что сначала люди оперировали только конкретными именованными числами, и только позже начали употреблять абстрактные числа.

Сначала людям были известны только натуральные числа, но позже жизнь заставила расширить понятие числа, рассматривать и дробные числа. Когда впервые появилось понятие дроби, не известно. Но исследования показывают, что древние египтяне, китайцы, хорезмийцы за много веков до нашей эры были знакомы с дробными числами и умели выполнять простейшие арифметические действия над ними.

В арифметике как науке рассматриваются все виды чисел от натуральных до комплексных. Однако в школьной арифметике изучают только положительные рациональные числа, а остальные виды чисел рассматриваются в алгебре. Авторы данного справочника придерживаются школьных традиций. В «Справочнике» отрицательные, иррациональные и мнимые числа изложены в главе «Алгебра», а в главе «Арифметика» рассматриваются только натуральные и дробные числа.

Первые книги, содержащие учение о счете и вычислениях, появились еще за несколько веков до нашей эры. Много арифметических сведений есть в «Началах» Евклида (III в. до н. э.), в «Арифметике» Диофанта (III в. н. э.) и других книгах древнегреческих математиков.

Известный хорезмский математик Мухаммед ибн Муса (около 780—850 гг.), использовав известные ему работы греческих и индийских математиков, написал книгу по арифметике, которая в латинском переводе попала в Европу в XII в. и содействовала распространению десятичной позиционной нумерации.

В Киевской Руси были широко распространены элементарные сведения из области арифметики, включая действия с обыкновенными дробями, что доказывается наличием косвенных источников. От XVII вв. сохранились рукописи математического содержания, из анализа которых явствует, что познания в арифметике на Руси того времени соответствовали уровню, достигнутому в Западной Европе. В начале XVIII в. появляются и печатные учебники по арифметике. Так, в 1703 г. была издана «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, самая популярная книга на протяжении первой половины XVIII в., которую М. В. Ломоносов называл «вратами своей учености». Этот учебник энциклопедического содержания, кроме арифметики, включал элементы геометрии и технических наук. В 1740 г. было напечатано «Руководство к арифметике» Л. Эйлера. Во второй половине XVIII в. вышли из печати учебники арифметики, написанные академиками С. К. Котельниковым, С. Я. Румовским и другими авторами. Широко распространены были в то время «Универсальная арифметика» Н. Г. Курганова, а также «Теоретическая и практическая арифметика» профессора Московского университета Д. С. Аничкова.

В 1866 г. были изданы «Руководство арифметики» и «Собрание арифметических задач» А. Ф. Малинина и К. П. Буренина, по которым учились в русских средних школах на протяжении полустолетия. Во второй половине XIX в. вышли в свет учебники по арифметике Ф. И. Симашко, В. А. Латышева, В. А. Евтушевского и других авторов. В 1884 г. издана «Арифметика» А. П. Киселева, на которой воспиталось несколько поколений русских, а затем и советских специалистов и которую только недавно заменил учебник «Арифметика» И. Н. Шевченко.

ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Нумерация

1. Натуральный ряд чисел. Когда пересчитывают какие-нибудь предметы, называют в строго определенном порядке числа: *один*, *два*, *три*, *четыре*, *пять*, *шесть* и т. д. Изображают их символами

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .

Эти числа называют *натуральными*. Множество натуральных чисел, упорядоченных в строго определенной указанной выше последовательности, называют натуральным рядом чисел, или короче *натуральным рядом*.

То из двух натуральных чисел, которое в натуральном ряде ближе стоит к 1, т. е. которое при счете появляется раньше, назы-

Устная нумерация

Число	Болгарская	Польская	Чешская	Сербо-хорватская	Латышская
1	един	jeden	jeden	jedan	viens
2	два	dwa	dva	dva	divi
3	три	trzy	tři	tri	trīs
4	четири	cztery	čtyři	četiri	četri
5	пет	pięć	pět	pet	pieci
6	шест	sześć	šest	šest	seši
7	седем	siedem	sedm	sedam	septiņi
8	осем	osiem	osm	osam	astoņi
9	девет	dziewięć	devět	devet	deviņi
10	десет	dziesięć	deset	deset	desmit
20	двадесет	dwadzieścia	dvacet	dvadeset	divdesmit
30	тридесет	trzydzieści	třicet	trideset	trīsdesmit
40	четиридесет	czterdzieści	čtyřicet	četrdeset	četrdesmit
50	петдесет	pięćdziesiąt	padesát	pedeset	piecdesmit
60	шестдесет	sześćdziesiąt	šedesát	šezdeset	sešdesmit
70	седемдесет	siedemdziesiąt	sedmdesát	sedamdeset	septiņdesmit
80	осемдесет	osiemdziesiąt	osmdesát	osamdeset	astoņdesmit
90	деветдесет	dziewięćdziesiąt	devadesat	devedeset	deviņdesmit
100	сто	sto	sto	sto	simts
1000	хиляда	tysiąc	tisíc	tisuća	tūkstotis

вается *меньшим*, второе число — *большим* *. Следовательно, в натуральном ряде каждое число, кроме 1, больше предыдущего. 1 — наименьшее натуральное число, но наибольшего натурального числа нет. Какое бы ни было большое натуральное число, существует еще большее следующее за ним натуральное число. *Натуральный ряд бесконечен*. Это показал еще в III в. до н. э. древнегреческий математик Архимед.

* Приведенные выше описания нельзя считать строгими определениями. Строгие определения этих понятий очень сложны (см. «Энциклопедия элементарной математики», I, Гостехиздат, М., 1951, стр. 133, 142 и др.).

Таблица 1

некоторых народов

Латинская	Английская	Немецкая	Французская	Испанская
unus	one	ein	un	uno
duo	two	zwei	deux	dos
tres	three	drei	trois	tres
quattuor	four	vier	quatre	cuatro
quinque	five	fünf	cinq	cinco
sex	six	sechs	six	seis
septem	seven	sieben	sept	siete
octo	eight	acht	huit	ocho
novem	nine	neun	neuf	nueve
decem	ten	zehn	dix	diez
viginti	twenty	zwanzig	vingt	veinte
triginta	thirty	dreizig	trente	treinte
quadraginta	fourty	vierzig	quarante	cuarenta
quinquaginta	fifty	funfzig	cinquante	cincuenta
sexaginta	sixty	sechzig	soixante	sesenta
septuaginta	seventy	siebzig	soixante-dix	setenta
octoginta	eighty	achtzig	quatre-vingt	ochenta
nonaginta	ninety	neunzig	quatre-vingt-dix	noventa
centum	hundred	hundert	cent	cien
mille	thousand	Tausend	mille	mil

2. **Устная нумерация.** При помощи слов «один», «два», «три», «четыре», «пять», «шесть», «семь», «восемь», «девять», «десять», «сорок», «сто», «тысяча», «миллион», «миллиард», определенным способом комбинируя их, можно назвать очень большие числа, встречающиеся в практике.

Устная нумерация у большинства народов появилась очень давно. О большом сходстве названий чисел у разных европейских народов см. табл. 1.

3. **Письменная нумерация.** Для записи натуральных чисел используют символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их называют *цифрами*. С помощью этих десяти цифр можно записать любое натуральное число.

Пример. 327 — триста двадцать семь, 1002 — тысяча два.

Такая экономная запись чисел достигается благодаря применению *принципа поместного значения цифр*. В зависимости от занимаемого цифрой места она может обозначать то одно, то другое число. Так, в приведенном выше примере цифра 2 в первом случае обозначает двадцать, а во втором — два.

Первая, вторая, третья и т. д. цифры числа, если считать справа налево, называются соответственно цифрами единиц, десятков, сотен и т. д. Их называют еще единицами первого, второго, третьего и т. д. *разрядов*. Например, в числе 7194 имеется 4 единицы первого, 9 единиц второго, 1 единица третьего и 7 единиц четвертого разрядов. Цифрой «0» — нуль обозначают отсутствие единиц того или иного разряда. Десять единиц какого-нибудь разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда. Поэтому говорят, что мы пользуемся *десятичной системой счисления*.

Десятичная система счисления возникла в глубокой древности. Люди стали пользоваться ею потому, что привыкли считать десятками, имея на руках десять пальцев. Однако некоторые народы в свое время создали и недесятичные системы счисления (см. стр. 79).

Принцип поместного значения цифр и начертания цифр (правда, несколько отличные от современных) возникли в Индии только в начале н. э. В Европе они стали известны благодаря книге «Арифметика Индорум», которую написал хорезмский математик Мухаммед ибн Муса. Она была написана на арабском языке и поэтому стали называть эти цифры *арабскими*. Позже, узнав, что Мухаммед в основу имеющейся в книге нумерации положил практику вычислителей Индии, стали называть эти цифры *индийскими*.

В России с индийской нумерацией познакомились только в XIII в. До этого числа обозначали старославянскими буквами, только сверху писали специальные значки ҃ (титло):

а	в	г	д	є	ѕ	з	и	ѳ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і	к	л	м	н	ѯ	о	п	ч
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р	с	т	у	ф	х	ѱ	ѿ	ц
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Тысячи обозначали теми же буквами, но впереди ставили значок ҂. Например, числа 7205, 1963 записывали соответственно так:

҂зсє, ҂ацѯг

В некоторых случаях еще и сейчас пользуются римскими цифрами. Римская система нумерации состоит из семи знаков:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

При этом, если меньший знак пишется после большего, то его прибавляют к большему числу; если же перед большим — вычитают, например: 8 — VIII, 24 — XXIV, 26 — XXVI, 46 — XLVI, 176 — CLXXVI, 1963 — MCMLXIII.

4. Целые числа. О нуле мы уже упоминали, но рассматривали его только как цифру (знак), а не число. Однако в математике принято рассматривать *нуль* не только как цифру, но и *как число*.

0 — число не натуральное. Нуль меньше 1 и любого натурального числа. Если разместить нуль и все натуральные числа в порядке возрастания, получим:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Эту последовательность чисел называют *расширенным натуральным рядом*.

Все натуральные числа и нуль называются вместе *целыми неотрицательными числами*. Но так как в арифметике обычно отрицательных чисел не рассматривают, здесь их называют просто *целыми числами**.

5. Названия больших чисел. Для удобства чтения и запоминания больших чисел их цифры разбивают на классы: справа отделяют три цифры — первый класс, следующие три — второй класс и т. д. Последний класс может иметь три, две или одну цифру. Между классами обычно оставляют небольшие промежутки. Например, в числе 2 365 423 первый класс дает число единиц, второй — число тысяч и третий — число миллионов. Сообразно с этим записанное число читают так: два миллиона триста шестьдесят пять тысяч четыреста двадцать три.

Единицы четвертого, пятого, шестого и т. д. классов называют соответственно:

миллиард или биллион — 1 000 000 000,
триллион — 1 000 000 000 000,
квадриллион — 1 000 000 000 000 000,
квинтиллион — 1 000 000 000 000 000 000,
секстиллион — 1 000 000 000 000 000 000 000,
септиллион — 1 000 000 000 000 000 000 000 000.

---

* В алгебре *целыми числами* называют все натуральные числа, нуль и все целые отрицательные числа: —1, —2, —3 и т. д.

Эти названия возникли сравнительно недавно. Существующее сейчас в большинстве европейских языков выражение «миллион» — 10^6 возникло в Италии в XIII в. *. Термины «биллион», «миллиард» и т. п. возникли в XVI—XVII вв., но до сих пор имеют различное (в разных языках) значение. Миллиард обычно означает 10^9, но то же значение имеет в США и во Франции биллион, тогда как в Германии биллион означает 10^{12}. Триллион в США и во Франции означает 10^{12}, а в Англии и Германии — 10^{18}. В русских математических рукописях встречаются наименования больших чисел, возникших, по-видимому, не раньше XII в.: тьма — 10^6, легион — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, колода — 10^{49}.

§ 2. Арифметические действия

1. **Понятие арифметического действия.** Если по двум данным числам определяют третье число, удовлетворяющее некоторым условиям, то этот процесс в математике вообще называют *действием*.

В арифметике рассматривают следующие действия: *сложение*, *вычитание*, *умножение* и *деление* называют *арифметическими действиями*.

2. **Сложение.** *Сложением натуральных чисел называют арифметическое действие, при помощи которого узнают число, содержащее столько единиц, сколько их есть в данных числах вместе.*

Числа, которые нужно сложить, называют *слагаемыми*, а результат сложения, т. е. число, получающееся от сложения, называют *суммой*.

Например: $11 + 9 = 20$. Здесь 11 и 9 — слагаемые, 20 — сумма. Знак сложения $+$ (плюс) ставится между слагаемыми.

Однозначные ** числа складывают, пользуясь *таблицей сложения:*

$$1 + 1 = 2,$$
$$2 + 1 = 3 \text{ и т. д.}$$

Эту таблицу дети запоминают еще в первом классе.

Сложение многозначных чисел удобней выполнять «в столбик», записывая слагаемые числа так, чтобы единицы были против единиц, десятки против десятков и т. д., например

$$\begin{array}{r} 29\,327 \\ +\ 4\,398\,186 \\ \hline 4\,427\,513 \end{array}$$

* $10^6 = 1\,000\,000$. Вообще 10^n обозначает число, записанное единицей с n последующими нулями.

** *Однозначными*, *двузначными* и т. д. называют числа, записанные одной, двумя и т. д. цифрами. Число, записанное несколькими цифрами, называют также *многозначным*.

Сложение натуральных чисел всегда *возможно* и *однозначно*, т. е., какие бы числа в качестве слагаемых ни брали, всегда можно найти их сумму и эта сумма должна быть для каждых данных чисел одна и та же.

Прибавление к числу нуля не изменяет этого числа, например

$$12+0=12;\quad 0+12=12;\quad 0+0=0.$$

Примечание. Древнейшим приемом сложения целых чисел было сложение слева направо; результат записывался сверху. Джон Голивуд (Сакробоско) ввел сложение справа налево; впоследствии этот прием распространился по всей Европе. Знак сложения + (плюс) возник не ранее XV в. По-видимому, он образовался путем стилизации латинского союза «et» (и). Тогда же появился и термин «сумма» в смысле результата сложения.

В России вместо «сложение» в XVII—XVIII вв. иногда применялся латинский термин «аддиция».

3. **Вычитание.** *Вычитанием называется действие, посредством которого по данной сумме и одному данному слагаемому отыскивается другое слагаемое.* Таким образом, число, которое при сложении является искомым, при вычитании оказывается данным, и наоборот. Поэтому вычитание называют действием, обратным сложению.

Число, из которого вычитают, называется *уменьшаемым*. Число, которое вычитают, — *вычитаемым*. Число, которое получается в результате вычитания, называется *разностью*.

Пример. $30-12=18$. Здесь 30 — уменьшаемое, 12 — вычитаемое, а 18 — разность. Знак вычитания минус (—) ставится между уменьшаемым и вычитаемым.

Вычитание в множестве натуральных чисел выполнимо лишь при условии, когда уменьшаемое больше вычитаемого. При этом разность выражается всегда определенным единственным натуральным числом.

Примечания: а) Вычитание нуля из числа не изменяет этого числа, например, $8-0=8$.

б) Если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна нулю. Например, $9-9=0$.

Подобно сложению более старым является прием, при котором вычитание ведется слева направо. Прием этот применялся в Западной Европе почти до XV в. Знак минус (—) появился в учебниках арифметики в XV в. одновременно со знаком плюс (+). Латинское название действия вычитания («субстракцио») применялось и в России в начале XVIII в.

4. **Умножение.** *Умножением натуральных чисел называется действие, состоящее в нахождении суммы одинаковых слагаемых.* Например, если число 5 нужно повторить слагаемым 7 раз, то пишут: $5\times 7=35$, и говорят, что нужно 5 умножить на 7:

$$5+5+5+5+5+5+5=5\times 7.$$

Можно сказать иначе: умножить одно натуральное число на другое — значит взять первое число слагаемым столько раз, сколько единиц во втором числе. При этом то число, которое повторяется как слагаемое, называется *множимым*, число, показывающее, сколько берется таких одинаковых слагаемых, — *множителем*, а число, полученное в результате умножения — *произведением*. Так, в нашем примере, 5 — множимое, 7 — множитель, 35 — произведение. Множимое и множитель называются также *сомножителями*.

Знак умножения ($\times$) ставится между множимым и множителем. В качестве знака умножения часто употребляется точка ($\cdot$), например $3 \cdot 5 = 15$.*

Примечания: а) Если один из двух сомножителей равен единице, то произведение равно второму сомножителю, например

$$1 \cdot 5 = 5; \quad 10 \cdot 1 = 10.$$

б) Если хоть один сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю:

$$0 \cdot 342 = 0; \quad 37 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

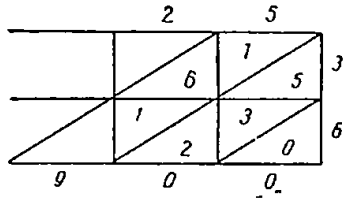
5. Исторические сведения об умножении натуральных чисел. В древней Индии умножение начинали с высших разрядов, т. е. слева направо. Способ умножения справа налево был выработан, по-видимому, не раньше XV в.

Знак умножения ($\times$) был предложен в первой половине XVII в. Точка, как знак умножения, появилась в XV в. Название действия, принятое в большинстве европейских языков и встречающееся также у старых русских авторов, «мультипликацио» применялось еще в древнем Риме.

Среднеазиатскими учеными был разработан способ умножения решеткой, который применялся также и в Западной Европе. Например, при умножении числа 25 на 36 эти числа записывали около сторон прямоугольника, который делился горизонтальными и вертикальными чертами на несколько частей (в зависимости от числа разрядов). Полученные меньшие прямоугольники делились пополам диагоналями, идущими снизу вверх направо. Результат поразрядного умножения записывался внутри маленьких прямоугольников, начиная с нижнего ряда так, что высший разряд стоял над диагональю, а низший — под ней. Умножаем сначала 25 на 6 и произведение записываем в нижнем ряду прямоугольника: $5 \cdot 6 = 30$, нуль пишем в нижнем правом прямоугольнике под диагональю, а 3 над ней; $2 \cdot 6 = 12$; 2 записываем во втором справа нижнем прямоугольнике под диагональю (т. е. в разряде десятков), а 1 — над диагональю (в разряде сотен). Затем умножаем 25 на 3 и аналогично записываем

* Перед буквенными сомножителями знак умножения не ставят. См. стр. 158.

произведение в верхнем ряду, после чего соответствующие разряды, складываем по диагоналям:



Интересный также *древнерусский способ умножения*. При умножении этим способом один из сомножителей последовательно делим пополам (остаток отбрасывается), а второй удваиваем. Потом складываем числа второй последовательности, соответствующие нечетным числам первой последовательности.

Пример. $44 \times 35 = 140 + 280 + 1120 = 1540$

22	70
11	140
5	280
2	560
1	1120

Древнерусский способ умножения применяется сейчас на счетных машинах. Оказывается, что умножение этим способом на некоторых машинах выполняется в 2—2,5 раза быстрее, чем умножение на тех же машинах способом последовательного сложения *.

6. **Деление.** *Делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.*

Число, которое делят, называется *делимым*; число на которое делят,— *делителем*; число, которое получается в результате деления, называется *частным*, или отношением **.

Деление записывается так: $40 : 8 = 5$. Здесь 40 — делимое, 8 — делитель, а 5 — частное. Знак деления: (двоеточие) ставится между делимым и делителем.

Число, которое при умножении является искомым, при делении оказывается данным, и наоборот. Поэтому деление называется действием, обратным умножению.

---

* П. Г. Хоменко. Умножение на счетных машинах. Машгиз, М., 1962.
** См. стр. 125.

Примечания: а) Если делимое равно делителю, то частное равно единице, например $14 : 14 = 1$.

б) Если делитель равен единице, то частное равно делимому, например $14 : 1 = 14$.

в) Частное от деления нуля на какое-либо число, отличное от нуля, равно нулю, например $0 : 12 = 0$.

г) Деление на нуль невозможно.

Деление натуральных чисел не всегда выполнимо. Например, нельзя разделить 30 на 7, ибо нет такого натурального числа, которое при умножении на 7 давало бы 30.

7. **Деление с остатком.** Как видим, разделить 30 на 7 (в указанном выше смысле) невозможно. Но в жизни встречаются ситуации, которые требуют распространить деление натуральных чисел и на такие случаи, например, разделить 30 тетрадей между 7 учениками поровну.

Поэтому рассматривают также *деление с остатком*.

Примечание. Чтобы не смешивать деление с остатком с рассмотренным выше арифметическим действием делением, последнее называют еще делением без остатка или делением нацело.

Деление с остатком — есть отыскание наибольшего целого числа, которое в произведении с делителем дает число, не превышающее делимое. Искомое число называется *неполным частным*. Разность между делимым и произведением делителя на неполное частное называется *остатком*; он всегда меньше делителя.

Пример. 19 не делится нацело на 5. Числа 1, 2, 3 при умножении на 5 дают 5, 10, 15, не превосходящие делимого 19, но уже 4 дает в произведении с 5 число 20, большее 19. Поэтому неполное частное будет 3, а остаток — 4 (разность между 19 и произведением $3 \cdot 5 = 15$); $19 = 5 \cdot 3 + 4$.

Для натуральных чисел точному делению (делению без остатка) и делению с остатком можно дать следующее общее определение: разделить число a (делимое) на число b (делитель) — значит найти такие два числа q (частное) и r (остаток), которые удовлетворяли бы соотношениям:

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b.$$

Если делитель b не равен нулю, то деление всегда возможно и дает единственный результат.

Остатком при делении на число b может быть любое из чисел $0, 1, 2, \ldots, b - 1$.

Примечание. В древности деление считалось самым трудным действием, которым мог овладеть не каждый. Причиной этого был очень громоздкий прием деления, который был занесен в Западную Европу вместе с арабскими учебниками и применялся до XVIII в. Способ, который является в настоящее время общепринятым, был разработан итальянскими учеными в XV в. Название действия, обще-

принятое в западноевропейских языках и применявшееся в России вплоть до первой половины XVIII в., — «дивизио», заимствовано из латинского языка. Знак деления (:) был принят в XVII в.

8. **Возведение в степень.** Частный случай умножения, а именно умножение одинаковых чисел, называют *возведением в степень*. Если, например, надо перемножить 5 одинаковых чисел, каждое из которых равно 2, говорят: надо число возвести в пятую степень. И вместо $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ пишут 2^5.

Возвести число во вторую, третью, четвертую и т. д. степень значит взять его сомножителем соответственно два, три, четыре и т. д. раза *. Число, повторяющееся сомножителем, называется *основанием степени*; число, указывающее, сколько раз берется одинаковый множитель, называется *показателем степени*, а результат — *степенью*.

Запись: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; здесь 5 — основание степени, 3 — показатель степени, 125 — степень.

Вторая степень называется иначе *квадратом*, третья степень — *кубом*. Первой степенью числа называют само это число, например $7^1 = 7$.

§ 3. Свойства арифметических действий

1. **Свойства сложения.** а) Переместительный закон сложения. *Сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.* Переместительный закон в общем виде записывается равенством:

$$a + b = b + a,$$

где a — первое слагаемое, b — второе слагаемое.

Примеры: $3 + 5 = 5 + 3$;
$4 + 0 = 0 + 4$.

б) Сочетательный закон сложения. *Сумма не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.* В общем виде это свойство для трех слагаемых записывается так:

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Пример. $35 + 15 + 20 = 35 + (15 + 20)$.

Переместительный и сочетательный законы называют также соответственно *коммутативным* и *ассоциативным* законами.

в) Прибавление суммы к числу и числа к сумме. Чтобы прибавить к какому-нибудь числу сумму нескольких чисел (или наоборот), достаточно прибавить к этому числу одно слагаемое, к полученной сумме прибавить второе слагаемое и т. д.

---

* О возведении в отрицательную, нулевую и дробную степени см. стр. 210.

Примеры. $584 + (12 + 23 + 34) = 584 + 69 = 653,$

или

$$584 + 12 = 596; \quad 596 + 23 = 619; \quad 619 + 34 = 653.$$

$$(345 + 424 + 576) + 55 = 1345 + 55 = 1400,$$

или

$$345 + 55 = 400; \quad 400 + (424 + 576) = 1400.$$

2. Свойства вычитания. а) Вычитание суммы из числа. Чтобы вычесть сумму из числа, можно вычесть из этого числа одно слагаемое, из полученной разности — второе слагаемое и т. д.

Обозначим уменьшаемое буквой a, отдельные слагаемые вычитаемой суммы буквами b и c, тогда свойство можно записать так:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Пример. $25 - (13 + 5) = 25 - 5 - 13 = 20 - 13 = 7.$

б) Вычитание числа из суммы. Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из какого-нибудь одного слагаемого (предполагается, что слагаемое больше вычитаемого) и полученную разность прибавить к сумме остальных слагаемых. Это свойство с помощью букв записывается так:

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Примеры. $(36 + 27) - 16 = (36 - 16) + 27 = 47,$

$(36 + 27) - 17 = 36 + (27 - 17) = 46.$

в) Прибавление разности. Чтобы прибавить разность к числу, достаточно прибавить к нему уменьшаемое и из полученной суммы вычесть вычитаемое. Это свойство с помощью букв записывается так:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Пример. $50 + (36 - 16) = 50 + 20 = 70,$ или $50 + 36 = 86,$ $86 - 16 = 70.$

г) Вычитание разности. Чтобы вычесть разность из числа, достаточно вычесть из него уменьшаемое (если это возможно) и к полученной разности прибавить вычитаемое.

Это свойство в общем виде записывается так:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Пример. $65 - (35 - 18) = (65 - 35) + 18 = 48.$

3. Свойства умножения. а) Переместительный закон умножения. *Произведение не изменяется от перемены мест сомножителей.*

Если обозначим первый сомножитель буквой a, а второй — буквой b, то переместительный закон можно записать в виде такого равенства:

$$ab = ba.$$

Пример. $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$.

б) Сочетательный закон умножения. *Произведение не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.*

В общем виде этот закон можно записать так:

$$abc = a(bc).$$

Пример. $12 \cdot 8 \cdot 4 = (12 \cdot 8) \cdot 4 = 12 \cdot (8 \cdot 4) = 384$.

в) Распределительный закон умножения (относительно суммы). *Произведение суммы нескольких чисел на какое-нибудь число равно сумме произведений каждого слагаемого на это число.* В общем виде для случая трех слагаемых этот закон можно записать так:

$$(a + b + c)\, d = ad + bd + cd.$$

Пример. $(30 + 45 + 120) \cdot 12 = 30 \cdot 12 + 45 \cdot 12 + 120 \cdot 12 = 360 + 540 + 1440 = 2340$.

Переместительный, сочетательный и распределительный законы называют также соответственно *коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным.*

г) Умножение произведения на число и числа на произведение. Чтобы умножить произведение нескольких чисел на какое-нибудь число (или наоборот), достаточно один из сомножителей произведения умножить на это число, оставив другие сомножители без изменения.

Примеры. $(35 \cdot 12) \cdot 4 = (35 \cdot 4) \cdot 12 = 140 \cdot 12 = 1680$,
$20 \cdot (7 \cdot 18 \cdot 5) = (20 \cdot 5) \cdot 7 \cdot 18 = 100 \cdot 7 \cdot 18 = 12600$.

д) Умножение разности на число. Чтобы умножить разность на число, достаточно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и затем из первого произведения вычесть второе.

В общем виде это свойство записывается так:

$$(a - b)\, c = ac - bc.$$

Пример. $(35 - 15) \cdot 4 = 35 \cdot 4 - 15 \cdot 4 = 140 - 60 = 80$.

Примечание. Это свойство иногда называют также распределительным законом умножения относительно разности.

4. **Свойства деления.** а) Деление суммы на число. Чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое отдельно (если это возможно) и полученные частные сложить. В общем виде это записывается так:

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Пример. $(8 + 12) : 4 = 8 : 4 + 12 : 4 = 2 + 3 = 5$.

б) Деление разности на число. Чтобы разделить разность на какое-нибудь число, достаточно (если это возможно) разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое отдельно, а потом из первого частного вычесть второе. При помощи букв это свойство можно записать так:

$$(a - b) : c = a : c - b : c.$$

Пример. $(18 - 6) : 3 = 18 : 3 - 6 : 3 = 6 - 2 = 4$.

Однако в примере $(17 - 7) : 5$ надо сперва найти разность $17 - 7$.

в) Деление числа на произведение. Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на один сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, вновь полученное частное разделить на третий сомножитель и т. д.

Пример. 960 разделить на произведение $4 \cdot 6 \cdot 8$ можно так: $960 : 4 = 240$; $240 : 6 = 40$; $40 : 8 = 5$.

г) Деление произведения на число. Частное от деления произведения двух сомножителей на число равно произведению одного из сомножителей на частное от деления другого сомножителя на это число (если такое деление выполнимо).

В общем виде

$$(ab) : c = (a : c)b.$$

Это свойство остается справедливым и в случае произведения нескольких сомножителей; с помощью букв оно записывается так:

$$(abc) : d = (a : d)bc.$$

Пример. Разделить произведение $24 \cdot 18 \cdot 10$ (равное 4320) на 8 можно так:

$$24 : 8 = 3; \quad 3 \cdot (18 \cdot 10) = 3 \cdot 180 = 540.$$

Однако в примере $(6 \cdot 8) : 16$ надо сперва вычислить произведение $6 \cdot 8$.

д) Умножение числа на частное. Чтобы умножить число на частное, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель.

При помощи букв это свойство можно записать:

$$a(b : c) = (ab) : c.$$

Пример. $6 \cdot (200 : 5)$ можно решить так:

$$6 \cdot 200 = 1200; \quad 1200 : 5 = 240.$$

е) Деление числа на частное. Чтобы разделить число на частное, достаточно (если это возможно) разделить данное число на делимое и полученное частное умножить на делитель.

В общем виде

$$a : (b : c) = (a : b)c.$$

Пример. 360 : (180 : 6) можно решить так:

$$360 : 180 = 2; \quad 2 \cdot 6 = 12.$$

Но пример 30 : (60 : 10) так решить нельзя, так как число 30 на 60 не делится.

ж) Деление частного на число. Чтобы разделить частное на число, достаточно умножить делитель на это число и на полученное произведение разделить делимое. Можно также разделить делимое на данное число, а полученное частное разделить на делитель.

В общем виде

$$(a : b) : c = a : (bc) \text{ или } (a : b) : c = (a : c) : b.$$

Пример. (1200 : 15) : 40 можно вычислять тремя способами:

а) (1200 : 15) : 40 = 80 : 40 = 2;

б) (1200 : 15) : 40 = 1200 : (15 · 40) = 1200 : 600 = 2;

в) (1200 : 15) : 40 = (1200 : 40) : 15 = 30 : 15 = 2.

5. **Зависимость между данными числами и результатами действий над ними.** Сложение. *Если известна сумма двух слагаемых, а одно слагаемое неизвестно, то, чтобы найти его, достаточно из суммы вычесть известное слагаемое,* т. е., если

$$a + b = c, \text{ то } a = c - b \text{ и } b = c - a.$$

Пример. $x + 30 = 42$; $x = 42 - 30$; $x = 12$.

Вычитание. *Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, достаточно к вычитаемому прибавить разность,* т. е., если $a - b = c$, то $a = b + c$.

Пример. $x - 8 = 5$; $x = 8 + 5$; $x = 13$.

Чтобы найти неизвестное вычитаемое, достаточно из уменьшаемого вычесть разность, т. е.,

$$\text{если } a - b = c, \quad \text{то} \quad b = a - c.$$

Пример. $45 - x = 15$; $x = 45 - 15$; $x = 30$.

Умножение. *Чтобы найти неизвестный сомножитель, достаточно разделить произведение на известный сомножитель* (или на произведение известных сомножителей):

$$\text{если } ab = c, \text{ то } a = c : b, \; b = c : a.$$

Примеры: а) $25x = 200$; $x = 200 : 25$; $x = 8$.

б) $3 \cdot 5x \cdot 2 = 210$; $x = 210 : (3 \cdot 5 \cdot 2)$; $x = 7$.

Деление. *Чтобы найти неизвестное делимое, достаточно делитель умножить на частное*, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \quad \text{то } a = bc.$$

Пример. $x : 25 = 3$; $x = 25 \cdot 3$; $x = 75$.

Чтобы найти неизвестный делитель, достаточно делимое разделить на частное, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } b = a : c.$$

Пример. $400 : x = 16$; $x = 400 : 16$; $x = 25$.

Чтобы найти делимое при делении с остатком, достаточно делитель умножить на частное и прибавить остаток.

В общем виде, если при делении a на b получили частное q и остаток r, то

$$a = bq + r.$$

Пример. Если $30 : 4 = 7$ (ост. 2), то $30 = 4 \cdot 7 + 2$.
$x : 5 = 4$ (ост. 3), то $x = 5 \cdot 4 + 3 = 23$.

Чтобы найти делитель при делении с остатком, достаточно из делимого вычесть остаток и разность разделить на частное.

С помощью букв можно записать так:

$$b = (a - r) : q.$$

Пример. $40 : x = 6$ (ост. 4), $x = (40 - 4) : 6 = 6$.

§ 4. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных

1. Изменение суммы и разности. *Если одно из слагаемых увеличить (уменьшить) на какое-нибудь число, то на это же число увеличится (уменьшится) и сумма*, т. е.,

$$\text{если } a + b = c, \text{ то } (a + m) + b = c + m \text{ и } (a - m) + b = c - m.$$

Примеры. $5 + 8 = 13$, тогда $(5 + 2) + 8 = 13 + 2$; $18 + 12 = 30$, тогда $(18 - 5) + 12 = 30 - 5$.

Если уменьшаемое увеличится (уменьшится) на какое-нибудь число, то и разность увеличится (уменьшится) на то же число, т. е.,

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } (a + m) - b = c + m$$
$$\text{и } (a - m) - b = c - m.$$

Примеры. $18 - 12 = 6$, тогда $(18 + 5) - 12 = 6 + 5$; $30 - 12 = 18$, тогда $(30 - 10) - 12 = 18 - 10$.

Если вычитаемое увеличить (уменьшить) на какое-нибудь число, то разность уменьшится (увеличится) на то же число, т. е.,

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } a - (b + m) = c - m$$
$$\text{и } a - (b - m) = c + m.$$

Примеры. $45 - 12 = 33$, тогда $45 - (12 + 3) = 33 - 3$; $52 - 30 = 22$, тогда $52 - (30 - 10) = 22 + 10$.

Если одно слагаемое увеличить, а другое уменьшить на одно и то же число, то сумма не изменится, т. е.,

$$\text{если } a + b = c, \text{ то } (a + m) + (b - m) = c.$$

Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить (или уменьшить) на одно и то же число, то разность не изменится, т. е.,

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } (a + m) - (b + m) = c$$
$$\text{и } (a - m) - (b - m) = c.$$

2. Изменение произведения и частного. *Если один сомножитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то и произведение увеличится (уменьшится) во столько же раз.*

В общем виде,

$$\text{если } ab = c, \text{ то } (am)\, b = cm$$
$$\text{и } (a : m)\, b = c : m.$$

Примеры. $5 \cdot 6 = 30$, тогда $(5 \cdot 4) \cdot 6 = 30 \cdot 4$; $4 \cdot 8 = 32$, тогда $(4 : 2) \cdot 8 = 32 : 2$.

Если один сомножитель произведения увеличить (уменьшить) в несколько раз, а другой уменьшить (увеличить) во столько же раз, то произведение не изменится, т. е.,

$$\text{если } ab = c, \text{ то } (a : m)\,(bm) = c.$$

Пример. $25 \cdot 10 = 250$, тогда $(25 : 5) \cdot (10 \cdot 5) = 250$.

Если делимое увеличится (уменьшится) в несколько раз, то и частное увеличится (уменьшится) во столько же раз, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } (ma) : b = mc$$
$$\text{и } (a : m) : b = c : m.$$

Примеры. $40 : 5 = 8$, тогда $(40 \cdot 6) : 5 = 6 \cdot 8$; $440 : 11 = 40$, тогда $(440 : 4) : 11 = 40 : 4$.

Если делитель увеличить (уменьшить) в несколько раз, то частное уменьшится (увеличится) во столько же раз, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } a : (bm) = c : m$$
$$\text{и } a : (b : m) = cm.$$

Примеры. $64 : 8 = 8$, тогда $64 : (8 \cdot 2) = 8 : 2$; $81 : 9 = 9$, тогда $81 : (9 : 3) = 9 \cdot 3$.

Если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то частное не изменится, т. е.,

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } (am) : (bm) = c$$
$$\text{и } (a : m) : (b : m) = c.$$

Это свойство называют основным свойством частного.

Пример. $32 : 16 = (32 \cdot 2) : (16 \cdot 2) = 2$ и $32 : 16 = (32 : 4) : (16 : 4) = 2$.

3. Изменение остатка. *Если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одно и то же число раз*, то частное не изменится, но *остаток увеличится (или уменьшится) в то же число раз.*

С помощью букв это записывается так: пусть a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток; тогда

$$a = bq + r \ (r < b), \quad am = (bm)\,q + rm,$$
$$a : m = (b : m)\,q + (r : m).$$

Об этом нельзя забывать при делении чисел, оканчивающихся нулями. Например, деление $84100 : 400$ иногда выполняют так:

$$\begin{array}{r|l} 841\cancel{00} & 4\cancel{00} \\ \underline{-84} & \overline{210} \\ 1 & \end{array}$$

В действительности же для чисел 84100 и 400 остаток будет не 1, а 100, так как мы делили 841 сотню на 4 сотни и получили 210 и в остатке 1 сотню. Иначе: так как, зачеркнув нули, уменьшили делимое и делитель в 100 раз, то согласно правилу и остаток уменьшился в 100 раз, поэтому для получения остатка от деления заданных чисел, его надо увеличить в 100 раз. Таким образом, $84100 : 400 = 210$ (ост. 100).

§ 5. Порядок действий, скобки

1. Порядок действий. При выполнении нескольких действий результат зависит от данных чисел и от порядка их выполнения. Так, например, $4 - 2 + 1 = 3$, если производить действия в порядке их записи; если же сначала сложить 2 и 1 и вычесть полученную сумму из 4, то получим 1. Для предупреждения недоразумений вводятся соглашения, в каком порядке следует выполнять действия в выражении, записанном без скобок.

Действия сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень принято делить на три ступени. Сложение и вычитание называют *действиями первой ступени*, умножение и деление — *дейст-*

виями второй ступени, а возведение в степень — *действием третьей ступени*.

Если в выражении (без скобок) встречаются действия только первой или только второй ступени, то их выполняют в том порядке, в каком они написаны, слева направо.

Примеры: а) $10 - 3 + 4 + 2 = 7 + 4 + 2 = 11 + 2 = 13$;

б) $40 \cdot 2 : 4 \cdot 5 = 80 : 4 \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 100$.

Примечание. Такой порядок действий второй ступени не соответствует принятому в алгебре, где под выражением $a : bc$ всегда понимают $\frac{a}{bc}$ (a деленное на произведение bc).

Поэтому в некоторых новых руководствах по арифметике (для последнего случая) рекомендуется иной порядок действий, отвечающий принятому в алгебре: если в выражении встречаются действия только второй ступени, то сначала выполняется умножение, а затем деление. Следуя этому правилу, последний пример надо было бы решать так *:

$$40 \cdot 2 : 4 \cdot 5 = 80 : 20 = 4.$$

Однако пока в шко́ле придерживаются традиционного правила.

Если в выражении встречаются действия разных ступеней, то *сначала выполняют действия высших, а потом низших ступеней*.

Пример. $2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3$; $5^2 = 25$; $2 \cdot 25 = 50$; $3 \cdot 3 = 9$; $50 - 9 = 41$.

2. Скобки. При решении примеров, которые содержат скобки, действия нужно проводить в таком порядке: *сначала выполнить действия, заключенные в скобки*, потом остальные, согласно принятым выше правилам.

Пример. $9 + 16 : 4 - 2(16 - 2 \cdot 7 + 4) + 6 \cdot (2 + 5)$.

Решение. Сначала выполняем действия в скобках:

$$16 - 2 \cdot 7 + 4 = 16 - 14 + 4 = 6; \quad 2 + 5 = 7.$$

Затем выполняем остальные действия:

$$9 + 16 : 4 - 2 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 9 + 4 - 12 + 42 = 43.$$

Часто для указания порядка действий необходимо заключать в скобки такие выражения, которые уже сами содержат скобки. Тогда, кроме обычных *круглых скобок* ( ), применяют скобки *квадратные* [ ]. Если в скобки нужно заключить выражение, содержащее уже круглые и квадратные скобки, пользуются *фигурными скобками* { }. Вычисление подобных выражений проводится в следующем порядке: сначала — вычисление внутри всех круглых скобок в указанной выше последовательности; затем — вычисление внутри всех квад-

* И. К. Андронов. Арифметика. Учпедгиз, 1962, стр. 108.

ратных скобок по тем же правилам; далее — вычисление внутри фигурных скобок; наконец, выполняются остальные действия.

Пример. $5+2\cdot\{14-3\cdot(8-6)\}+32:(10-2\cdot3)$.

Решение. Выполняем действия в круглых скобках:

$$8-6=2;\quad 10-2\cdot3=10-6=4;$$

действия в квадратных скобках дают: $14-3\cdot2=8$; выполняя остальные действия, находим:

$$5+2\cdot8+32:4=5+16+8=29.$$

§ 6. Проверка арифметических действий

1. Проверка действий на основании зависимости между данными и результатами действий. Когда выполняют много вычислений, прибегают к контролю приводимых вычислений, т. е. к контролю правильности выполнения арифметических действий. Для этого чаще всего используют основные законы арифметических действий и зависимости между данными и результатами действий. Например, правильность выполнения сложения $243596+32483=276079$ можно проверить сложением — переставив слагаемые, или вычитанием: $276079-243596=32483$.

Аналогично проверяют правильность выполнения и других арифметических действий: вычитания, умножения и деления. Но иногда целесообразно пользоваться специальными приемами проверки вычислений, например «правилом девятки».

2. Правило девятки. Если надо проверить правильность выполнения сложения, часто делают так. Находят остатки от деления на 9 сумм цифр каждого слагаемого, складывают их и результат снова делят на 9. Полученный остаток сравнивают с остатком от деления на 9 суммы цифр найденной суммы. Если сложение выполнено верно, то эти остатки должны быть равны. Если же остатки не равны, значит сложение выполнено неверно.

Пример.

	2378	2
	3819	3
+	955	1
	200369	2
	206521	7

В данном примере остатки от деления на 9 сумм цифр слагаемых равны: 2, 3, 1, 2, их сумма равна 8. А остаток от деления на 9 суммы цифр. результата 206521 равен 7. Значит, сложение выполнено неверно.

Аналогично можно проверять и правильность выполнения умножения. Только полученные остатки от деления на 9 сумм цифр сомножителей надо не складывать, а перемножать.

Пример.

$$\begin{array}{rr} 1362 & 3 \\ 103 & 4 \\ \hline 4086 & \\ 1362 & \\ \hline 140286 & 3 \end{array}$$

Здесь остатки от деления на 9 сумм цифр сомножителей равны 3 и 4. Их произведение 12. Разделив 12 на 9, получим остаток 3. Такой же остаток получается, если разделить на 9 сумму цифр числа 140286. Следовательно, можно надеяться, что умножение выполнено верно.

Примечание. Правило девятки не всегда дает возможность обнаружить ошибку в вычислениях. Например, если бы вместо верного ответа 140286 получили 140376 или 142086, правило девятки не обнаружило бы ошибки, ведь остатки от деления на 9 суммы цифр каждого из этих чисел равны 3. Следовательно, этот способ проверки не является достаточным. Однако подобные ошибки, когда найденный результат отличается от верного только порядком цифр и др., маловероятны.

Так как вычитание и деление есть действия, обратные сложению и умножению, и правильность вычисления разности и частного проверяется соответственно сложением и умножением, то правило девятки можно применять также для контроля вычитания и деления.

Известен также способ проверки арифметических действий * при помощи числа 11.

§ 7. Способы быстрых вычислений

Умение быстро и безошибочно производить устные и письменные вычисления позволяет экономить труд и время, а также быстро обнаруживать ошибки в своих или чужих расчетах. Приведем несколько способов, которые наиболее часто используются в вычислительной практике.

1. Способы быстрого сложения и вычитания. Прием округления. Этот прием основан на изменении суммы или разности в зависимости от изменения компонентов и применяется в том случае, когда хотя бы один из компонентов представляет собой число, близкое к круглым десяткам, сотням, тысячам и т. д.

---

* Б. А. Тулинов, Я. Ф. Чекмарев. Теоретическая арифметика Учпедгиз, М., 1940, стр. 111.

а) Если одно из слагаемых, округляя, увеличим на несколько единиц, то из полученной суммы надо вычесть столько же единиц.

Пример. $264 + 391 = 264 + (391 + 9) - 9 = 264 + 400 - 9 = 655$.

б) Если одно слагаемое увеличим на несколько единиц, а второе уменьшим на столько же единиц, сумма не изменится. На основании этого выполняется округление одного слагаемого за счет другого.

Пример. $998 + 936 = 1000 + 934 = 1934$.

в) Если вычитаемое при округлении увеличим на несколько единиц, то, чтобы разность не изменилась, надо и уменьшаемое увеличить на столько же единиц.

Пример. $2342 - 996 = 2346 - 1000 = 1346$.

г) Если уменьшаемое при округлении уменьшим на несколько единиц, то к полученной разности надо прибавить столько же единиц.

Пример. $10012 - 8645 = 10000 - 8645 + 12 = 1355 + 12 = 1367$.

Использование свойств сложения и вычитания.

Примеры. $279 + 583 + 721 = (279 + 721) + 583 = 1583$;
$352 + 109 - 52 = (352 - 52) + 109 = 409$;
$573 - 432 - 68 = 573 - (432 + 68) = 73$.

2. Способы быстрого умножения и деления. Умножение методом Ферроля. Для получения единиц произведения перемножают единицы сомножителей, для получения десятков умножаются десятки одного на единицы другого сомножителя и наоборот и результаты складываются, для получения сотен перемножаются десятки *.

Этот способ можно изобразить схематически так.

Пример.
$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 46 \\ \hline 1472 \end{array}$$

$2 \cdot 6 = 12$, 2 пишем, 1 помним
$3 \cdot 6 = 18$, $2 \cdot 4 = 8$, $18 + 8 + 1 = 27$,
7 пишем 2 помним.
$3 \cdot 4 = 12$ и 2 — пишем 14.

Умножение на число, близкое к единице какого-нибудь разряда.

Примеры. $405 \cdot 97 = 405 \cdot (100 - 3) = 405 \cdot 100 - 405 \cdot 3 = 40500 - 1215 = 39285$;

$8012 \cdot 1006 = 8012\,(1000 + 6) = 8012000 + 8012 \cdot 6 = 8012000 + 48072 = 8060072$.

Умножение на 9, 99 и 999. *Чтобы умножить на число, написанное девятками, надо к множимому приписать справа столько нулей, сколько девяток во множителе, и из результата вычесть множимое.*

---

* Этот способ умножения следует из тождества

$$(10a+b)(10c+d)=100ac+10(ad+bc)+bd.$$

Примеры. $387 \cdot 9 = 3870 - 387 = 3483$;
$24 \cdot 99 = 2400 - 24 = 2376$; $18 \cdot 999 = 18000 - 18 = 17982$.

Умножение двузначного числа на 11. *Чтобы умножить двузначное число, сумма цифр* которого меньше* 10, *на* 11, *надо между цифрами числа написать сумму его цифр.*

Пример. $72 \cdot 11 = 792$.

Чтобы умножить на 11 двузначное число, сумма цифр которого больше или равна 10, надо между цифрой десятков, увеличенной на 1, и цифрой единиц написать избыток суммы цифр числа над 10.

Пример. $68 \cdot 11 = 748$.

Умножение на 5, 25, 125. *Чтобы умножить число на* 5, 25, 125, *достаточно разделить его соответственно на* 2, 4, 8 *и результат умножить на 10, 100, 1000.*

Примеры. $2486 \cdot 5 = 12430$, так как $2486 : 2 = 1243$;
$8084 \cdot 25 = 202100$, так как $8084 : 4 = 2021$.

Деление на 5, 25, 125. *Чтобы разделить число на* 5, 25, 125, *достаточно умножить его соответственно на* 2, 4, 8 *и разделить на* 10, 100, 1000.

Примеры. $235 : 5 = 47$, так как $235 \cdot 2 = 470$;
$1175 : 25 = 47$, так как $1175 \cdot 4 = 4700$.

Использование свойств умножения и деления.

Примеры. $93 \cdot 8 \cdot 125 = 93 \cdot (8 \cdot 125) = 93000$;
$36 \cdot 18 : 9 = 36 \cdot (18 : 9) = 36 \cdot 2 = 72$;
$26 \cdot 235 : 13 = (26 : 13) \cdot 235 = 470$.

Возведение в квадрат чисел, имеющих цифру 5. *Чтобы возвести в квадрат двузначное число, оканчивающееся цифрой* 5, *достаточно число его десятков умножить на число, увеличенное на единицу, и к произведению справа дописать* 25.

Пример. Вычислить 35^2.

Решение (выполняется устно). $3 \cdot 4 = 12$, дописав 25, получим результат: $35^2 = 1225$.

Чтобы возвести в квадрат двузначное число, имеющее 5 десятков, достаточно к 25 прибавить цифру единиц и к результату приписать справа квадрат числа единиц так, чтобы в результате получилось четырехзначное число**.

---

* См. сноску на стр. 71.

** Эти правила следуют из тождеств:

$$(10a+5)^2 = 100a(a+1)+25,$$
$$(50a+b) = 2500+100b+b^2.$$

Пример. Вычислить 54^2; 52^2.

Решение (выполняется устно). К 25 прибавляем 4, получаем 29. Приписываем 16. Получаем: $54^2 = 2916$.

$52^2 = 2704$.

§ 8. Инструментальные вычисления

Кроме устных и письменных вычислений, широкое распространение получили также различные инструментальные вычисления, т. е. вычисления с помощью специальных приспособлений — счетов, арифмометров и т. п.

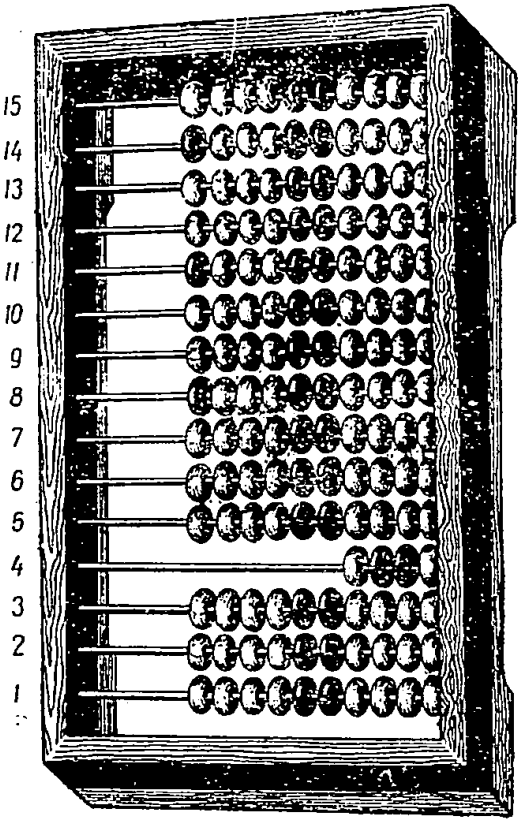


Рис. 1.

1. **Русские счеты.** Это приспособление представляет собой деревянную раму с параллельными проволоками (обычно их 15). На каждой проволоке, нанизано по 10 косточек, на четвертой или на третьей снизу — четыре косточки. Для удобства две средние косточки на каждой проволоке окрашены в черный цвет (рис. 1).

На счетах разрядные единицы заменяются косточками, которые откладываются на соответствующих проволоках. Целое число изображается при помощи косточек в таком же порядке, как и на письме, начиная с единиц высшего разряда числа, последовательно разряд за разрядом, вплоть до простых единиц.

При откладывании чисел на счетах пользуются следующими правилами: а) 10 косточек на любой проволоке счетов заменяются одной косточкой соседней верхней проволоки, а одна косточка на любой проволоке может заменяться десятью косточками соседней нижней проволоки; б) на определенных проволоках счетов надо откладывать лишь столько

косточек, сколько единиц содержит соответствующий разряд данного числа; в) проволоки счетов, соответствующие тем разрядам, где в записи данного числа стоит нуль, надо оставлять свободными.

Для того чтобы *сложить* два числа, следует отложить на счетах первое слагаемое, затем — второе. Если при откладывании второго слагаемого на какой-нибудь проволоке не хватает косточек, следует отложить одну косточку на проволоке следующего высшего разряда, одновременно сняв (слева) на данной проволоке столько косточек, сколько единиц соответствующего разряда не хватает во втором слагаемом до 10. Отложив на счетах второе слагаемое, получим результат — сумму двух слагаемых. Если нужно сложить три или больше слагаемых, то к сумме первых двух прибавляют третье и т. д.

Например. $235 + 387$. Отложив на счетах 235 (слева), присоединим к 2 косточкам разряда сотен еще 3, получим 5 сотен. На следующей нижней проволоке следует отложить влево 8 косточек, но там их только 7, поэтому вместо 8 десятков отложим на следующей верхней проволоке 1 сотню, т. е. 10 десятков и сбросим на данной проволоке 2 косточки (2 десятка, которые мы отложили лишние). Чтобы прибавить 7 единиц, прибавим 1 десяток, а 3 единицы снимем. Получим 622.

При *вычитании* на счетах надо отложить уменьшаемое и с него сбросить вычитаемое.

При этом: а) сбрасывание косточек начинают с единиц старшего разряда; б) если в процессе вычитания на какой-нибудь проволоке для сбрасывания соответствующего разрядного числа вычитаемого не хватает косточек, то на этой проволоке переводят влево число косточек, дополняющее число разрядных единиц вычитаемого до 10, а на ближайшей сверху проволоке сбрасывают одну косточку; в) по оставшимся слева косточкам, читают разность.

Умножение чисел на счетах приводится к сложению. Но приведение умножения к сложению на счетах практически оправдывает себя только тогда, когда пользуются сокращенными способами умножения. Наиболее распространенный способ основан на умножении одного из сомножителей на сумму разрядных единиц второго сомножителя с последовательным сложением полученных произведений.

Например, $123 \cdot 12 = 123 \cdot 10 + 123 \cdot 2 = 1230 + (123 + 123)$.

Часто используется также прием округления.

Деление на счетах сводится к последовательному вычитанию из делимого делителя и его произведений на целые степени десяти. При этом в каждом разряде частного будет столько единиц, сколько раз пришлось вычитать произведения делителя на соответствующую степень 10. Исчерпывание делимого следует начинать со старших

разрядных единиц. При делении верхние проволоки отводят для изображения частного.

Например, пусть требуется разделить 9375 на 75. Для этого откладываем на счетах 9375, затем отделяем большим пальцем левой руки в делимом 93, из 93 вычитаем (сбрасываем) делитель 75 : 93 — — 75 = 18. В частном (на крайней верхней проволоке) откладываем одну кость. Передвигаем большой палец левой руки вниз на одну проволоку. Из числа 187 два раза вычитаем число 75, в частном на одну проволоку ниже откладываем две кости. Из оставшегося числа 375 вычитаем пять раз число 75; каждое вычитание отмечаем одной костью в частном на третьей сверху проволоке. После этого в делимом не будет остатка, а в частном будет отложено 125. Это будет искомый результат.

2. Арифмометр. Существует много различных типов арифмометров *. Мы рассмотрим арифмометр «Феликс» (рис. 2).

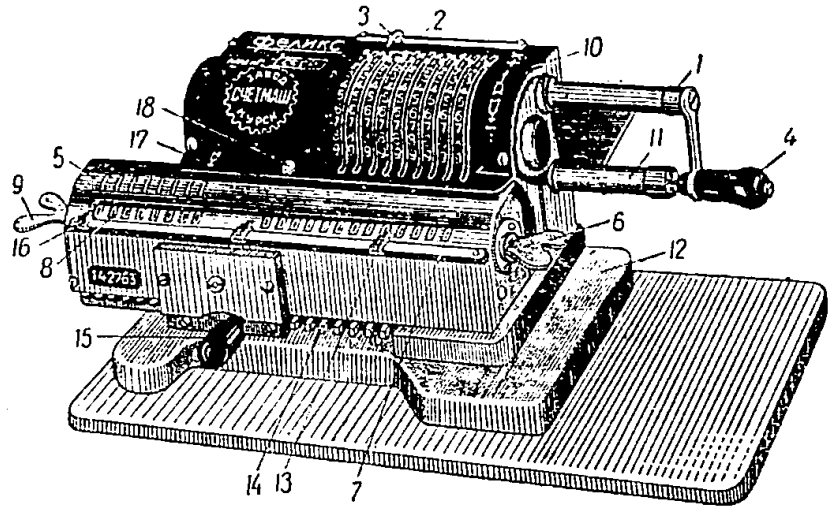


Рис. 2.

Установка чисел на этом арифмометре осуществляется передвижением установочных рычагов *2* вниз по установочным шкалам. Всего установочных шкал 10, каждая из них соответствует определенному разряду. Нумерация установочных шкал идет справа налево и воспроизведена на специальной шкале.

---

* Г. П. Евстигнеев и В. Н. Крупшин, Счетно-цифровые машины, Машгиз, 1953.

Чтобы привести все установочные рычажки в исходное положение (погасить установку), необходимо повернуть на четверть оборота по часовой стрелке оперативную рукоятку *4* при отведенной влево кнопке гасительной гребенки рычажков *18*.

В каретке *5* арифмометра находятся окна счетчиков: справа окна счетчика результатов *7* и слева окна счетчика оборотов *8*. В счетчике результатов имеются 13 разрядов (окошек), в счетчике оборотов — 8. Разряды результативного и оборотного счетчиков занумерованы справа налево. При вращении оперативной рукоятки в окошках оборотного счетчика появляются цифры (белые при вращении по часовой стрелке, красные при вращении против часовой стрелки), указывающие число соответствующих оборотов. Счетчики гасятся гасительными барашками *6* и *9*, при помощи поворота их до защелкивания.

При одном нажиме на рычажок *15* каретка может переместиться только на один разряд в соответствующем направлении. При поднятом рычажке *15* каретка может свободно перемещаться вправо и влево.

Для указания разряда, в котором идет счет, служит стрелка *17*. Подвижные запятые служат для отделения целой части чисел, которые получаются на счетчиках, от дробной части.

Перед началом работы на арифмометре необходимо его привести в исходное положение, т. е.:

а) оперативная рукоятка *4* должна быть опущена вниз и защелкнута;

б) барашки *6* и *9* горизонтально и защелкнуты;

в) каретка *5* неподвижна и защелкнута рычажком *15*;

г) оба счетчика погашены.

Во время вращения оперативная рукоятка *4* должна быть оттянута вправо, а по окончании вращения защелкнута. Вращать рукоятку надо с остановкой внизу. Барашки, рукоятка и установочные рычажки должны работать легко.

При работе на арифмометре запрещается:

а) вращать рукоятку, не убедившись в том, что барашки защелкнуты;

б) останавливать рукоятку не в вертикальном нижнем положении;

в) перемещать каретку, не проверив, что барашки и рукоятка защелкнуты;

г) делать резкие движения и удары по рычагу при перемещении каретки на несколько делений.

Сложение на арифмометре. Пусть требуется сложить два числа: 38785 и 30817. Для этого поступаем таким образом:

1) приводим арифмометр в исходное положение;

2) ставим каретку в крайнее левое положение;

3) установочными рычажками набираем первое слагаемое 38785,— единицы на первой шкале, десятки на второй и т. д.;

4) оперативной рукояткой *4* делаем полный оборот по часовой стрелке; в окошках результативного счетчика появляется первое слагаемое (38785), в окошке оборотного счетчика — белая цифра 1;

5) отводим влево рычажок гасительной гребенки и делаем четверть оборота по часовой стрелке, гасим на установочных шкалах первое слагаемое;

6) не сдвигая каретку, устанавливаем рычагами второе слагаемое (30817);

7) делаем полный оборот оперативной рукоятки *по часовой стрелке;*

8) в окошках результативного счетчика читаем сумму (69602).

При сложении трех или большего количества слагаемых повторяем пятую, шестую и седьмую операции и только после этого читаем результат.

Вычитание. Пусть требуется из числа 38785 вычесть число 30817. Для этого проделываем шесть первых операций, которые следовало бы сделать при сложении указанных чисел, а затем в качестве 7-й операции делаем полный оборот оперативной рукоятки *против часовой стрелки* и в качестве 8-й операции, так же как и в случае сложения, на результативном счетчике читаем разность (7968).

Умножение. Пусть требуется найти произведение $654 \cdot 56$. Для этого делаем следующее:

1) приводим арифмометр в исходное положение;

2) ставим каретку в крайнее левое положение;

3) устанавливаем рычажками сомножитель с большим числом значащих цифр (654);

4) вращаем оперативную рукоятку по часовой стрелке 6 раз (до появления в окошке оборотного счетчика низшего разряда второго сомножителя;

5) передвигаем каретку на один разряд и вращаем рукоятку по часовой стрелке 5 раз (до появления во втором окошке оборотного счетчика следующей справа налево цифры второго сомножителя);

6) на результативном счетчике читаем произведение (36624).

Если бы во втором множителе была цифра третьего разряда, то 5-ю операцию следовало бы повторить. Так же следовало бы поступить при наличии во втором множителе цифр четвертого и высших разрядов.

Примечание. При перемножении десятичных дробей, прежде чем считать результат, следует произвести отделение целой части произведения от дробной при помощи запятой *13* на шкале счетчика результатов.

При выполнении в каком-либо разряде умножения на число, большее пяти, имеет смысл для сокращения числа оборотов сделать один

лишний положительный оборот в соседнем слева разряде, а в разряде, производимом умножение, сделать отрицательные обороты в количестве, равном разности 10 и числа, на которое производится умножение.

Например, при умножении на 187 можно обойтись шестью оборотами (вместо 16): тремя отрицательными оборотами в разряде единиц, одним отрицательным в разряде десятков и двумя положительными в разряде сотен (200 — 13). На счетчике оборотов будет число 213, причем 2 — белая цифра, 1 и 3 — красные цифры. Читать это число следует так: 200 — 13 = 187 (число оборотов, равное множителю).

Деление. Операция деления на арифмометре, так же как и на русских счетах, приводится к повторному вычитанию делителя из делимого, в результате чего в счетчике оборотов получается частное.

Пусть требуется произвести на арифмометре деление 624 : 24.

Для этого поступаем так:

1) приводим арифмометр в исходное положение;

2) подаем каретку вправо до отказа (а не влево, как при умножении);

3) устанавливаем делимое 624 при помощи оперативной рукоятки *4*, каретки *5* и гасительного барашка *6*;

4) прямым оборотом оперативной рукоятки переводим делимое в счетчик результатов, где оно расположится в окошках: 6 в *13*-м окошке, 2 в *12*-м окошке и 4 в *11*-м окошке;

5) гасим единицу, получившуюся в окне счетчика оборотов *8*, и установочные рычажки;

6) устанавливаем рычажками при помощи каретки *5* и гасительного барашка счетчика результатов *6* делитель 26 против 62 делимого;

7) делаем два обратных оборота рукоятки, после чего на месте первых двух цифр делимого появляется 10, а в счетчике оборотов — красная цифра 2;

8) подаем каретку на один разряд влево и делаем четыре обратных поворота. В счетчике результатов появляются нули, а в счетчике оборотов—частное 24 (красными цифрами). Следовательно, 624:26=24.

§ 9. Делимость чисел

1. **Делимость суммы.** *Если каждое из слагаемых делится на какое-нибудь число, то и сумма их обязательно разделится на это же число.*

Пример. 32 делится на 4,
16 делится на 4,
40 делится на 4.

следовательно, сумма 32 + 16 + 40 также делится на 4.

Если каждое слагаемое, кроме одного, делится на какое-нибудь число, а одно не делится, то сумма не разделится на это число.

Пример 32 делится на 16,
16 делится на 16,
40 не делится на 16,

сумма $32 + 16 + 40$ также не разделится на 16.

Если же два или больше слагаемых не делятся на какое-нибудь число, то о делимости суммы нельзя сказать ничего определенного: в одних случаях она делится, а в других не делится на данное число.

Пример. 13 и 7 не делятся ни на 5, ни на 6; сумма $13 + 7$ делится на 5, но не делится на 6.

2. Делимость разности. *Если уменьшаемое и вычитаемое делится на какое-нибудь число, то и разность разделится на это же число.*

Пример. 100 делится на 5,
35 делится на 5,
разность $100 - 35$ делится на 5.

Если только одно из чисел — уменьшаемое или вычитаемое — делится на какое-нибудь число, а другое не делится, то и разность не делится на это число.

Пример. 100 делится на 20,
30 не делится на 20,
разность $100 - 30$ не делится на 20.

Если ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делится на данное число, то разность их может делиться, а может и не делиться на это же число.

Пример. 100 и 30 не делится ни на 7 ни на 13. Их разность $100 - 30$ делится на 7, но на 13 не делится.

3. Делимость произведения на число и числа на произведение. *Если хоть один из сомножителей делится на какое-нибудь число, то и произведение их также разделится на это число.*

Пример. 15 делится на 3, следовательно, каждое из произведений

$$15 \cdot 17, \quad 8 \cdot 15 \cdot 101, \quad 23 \cdot 15 \cdot 15$$

также делится на 3.

Если же ни один из сомножителей не делится на данное число, то из этого еще не следует, что на данное число не разделится и их произведение.

Пример. Ни 15, ни 10 не делится на 6, а их произведение $15 \cdot 10$ на 6 делится.

Если данное число делится на произведение, то оно делится также на каждый из сомножителей этого произведения.

Пример. 90 делится на произведение $2 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому 90 делится и на 2, и на 3, и на 5.

Обратное утверждение ошибочно. Если какое-нибудь число делится в отдельности на несколько данных чисел, то на их произведение оно может и не разделиться.

Пример. 180 делится и на 5, и на 9, и на 6, но на произведение $5 \cdot 9 \cdot 6$ оно не делится.

Примечание. Если же данное число делится на несколько попарно взаимно простых чисел (см. стр. 78), то оно делится и на их произведение.

Пример. 180 делится на 5, 3 и 4; эти числа попарно взаимно простые, поэтому 180 делится и на произведение $5 \cdot 3 \cdot 4$.

§ 10. Признаки делимости.

Деление без остатка не всегда может быть выполнено. Чтобы, не выполняя деления, установить, делится или не делится одно число на другое, пользуются *признаками делимости*.

1. **Признак делимости на 10.** *На 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются нулями.*

Пример. Число 2350 делится на 10.

2. **Признак делимости на 2 и на 5.** *На 2 или на 5 делятся те и только те числа, у которых последняя цифра выражает число, делящееся соответственно на 2 или на 5.*

Примеры. Число 140 делится и на 2, и на 5, так как оно оканчивается нулем (а нуль делится на любое число). Число 1306 делится на 2, так как последняя его цифра 6 выражает число, делящееся на 2, но на 5 это число не делится, так как 6 не делится на 5. Число 2035 делится на 5, так как 5 делится на 5, но на 2 это число не делится, так как 5 не делится на 2.

3. **Признак делимости на 3 и на 9.** *На 3 или на 9 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр* делится соответственно на 3 или на 9.*

Пример. Число 31521 делится на 3, так как сумма его цифр $3+1+5+2+1=12$ делится на 3. На 9 это число не делится, так как 12 не делится на 9. Число 5193 делится на 9, так как сумма его цифр $5+1+9+3=18$ делится на 9. Это число делится также и на 3 (если число делится на 9, то, естественно, оно делится и на 3).

4. **Признаки делимости на 4 и на 25.** *На 4 или на 25 делятся те и только те числа, которые оканчиваются двумя нулями или у кото-*

---

* Выражение «сумма цифр» употребляется с целью упрощения формулировки вместо слов «сумма однозначных чисел, выраженных цифрами», ведь цифры — только значки, и действия выполняются над числами, а не над цифрами.

рых две последние цифры выражают число, делящееся соответственно на 4 *или на* 25.

Пример. Число 4600 делится и на 4, и на 25, так как оно оканчивается двумя нулями (следовательно, делится на $100 = 4 \cdot 25$). Число 1264 делится на 4, так как 64 делится на 4, но это число не делится на 25, так как 64 не делится на 25. Число 1275 делится на 25, так как 75 делится на 25, но не делится на 4, так как 75 не делится на 4.

5. **Признак делимости на 8 и на 125.** *На* 8 *или на* 125 *делятся те и только те числа, которые оканчиваются тремя нулями, а также у которых три последние цифры выражают число, делящееся соответственно на* 8 *или на* 125.

Пример. Число 3279000 делится и на 8 и на 125, так как оно делится на $1000 = 8 \cdot 125$. Число 5248 делится на 8, но не делится на 125, так 248 делится на 8, но не делится на 125.

6. **Признак делимости на 7, 11 и 13.** *На* 7, 11, *или* 13 *делятся те и только те числа, у которых разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами (или наоборот), делится соответственно на* 7, *на* 11, *или на* 13.

Пример. Число 253253 делится и на 7, и на 11, и на 13, так как разность $253 - 253 = 0$, а нуль делится на любое число (не равное нулю). Число 253264 делится на 11, но не делится ни на 7, ни на 13, так как разность $264 - 253 = 11$ делится на 11, но не делится ни на 7, ни на 13. Число 1 208 965 не делится ни на 7, ни на 11, ни на 13, так как разность $1208 - 965 = 243$ не делится ни на одно из этих чисел.

7. **Признаки делимости на 6, 12, 18, 24 и т. д.** *На* 6 *делятся те и только те числа, которые делятся на* 2 *и на* 3.

Пример. Число 31242 делится на 6, так как оно делится на 2 и на 3 (а числа 2 и 3 не имеют общих множителей, больших 1).

На 12 *делятся те и только те числа, которые делятся на* 3 *и на* 4 (но не на 2 и на 6, так как 2 и 6 имеют общий множитель, поэтому, например, 18 делится и на 2 и на 6, но не делится на 12).

Пример. 216 делится на 12, так как оно делится на 3 и на 4.

На 18 *делятся те и только те числа, которые делятся на* 2 *и на* 9.

Пример. 9396 делится на 18, так как оно делится на 2 и на 9.

Существуют признаки делимости и на другие числа, но они сложные, поэтому в таких случаях иногда пользуются общим признаком делимости чисел.

8. **Общий признак делимости чисел.** *Для того чтобы число* N *делилось на* d, *необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений цифр этого числа на остатки, получаемые от деления на* d *соответствующих степеней десяти, делилась на* d.

Если $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + 10 + a_0$ и $10^n = d \cdot q_n + r_n$; $10^{n-1} = d \cdot q_{n-1} + r_{n-1}$; . . . ; $10^2 = d \cdot q_2 + r_2$; $10 = dq_1 + r_1$, то N делится на d в том и только в том случае, когда на d делится сумма:

$$M = a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0.$$

Из общего признака легко вывести рассмотренные выше частные признаки делимости и некоторые другие. Пусть, например, $d = 11$. Тогда

$$\begin{array}{ll} 10 = 11 \cdot 1 - 1 & r_1 = -1 \\ 10^2 = 11 \cdot 9 + 1 & r_2 = +1 \\ 10^3 = 11 \cdot 91 - 1 & r_3 = -1 \\ 10^4 = 11 \cdot 909 + 1 & r_4 = +1 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Следовательно, при $d = 11$ $M = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$. Имеем такой признак: *на* 11 *делятся все те и только те числа, у которых разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой остальных цифр делится на* 11.

Пример. Делится ли на 11 число 47 214 051 819?

$9 + 8 + 5 + 4 + 2 + 4 = 32$, $1 + 1 + 0 + 1 + 7 = 10$, $32 - 10 = 22$.

22 делится на 11, следовательно, и данное число делится на 11.

§ 11. Простые и составные числа

1. Простые и составные числа. Всякое число * делится на единицу и само на себя. Существуют числа, которые делятся не только на единицу и сами на себя, но имеют еще и другие делители. Например, число 12, кроме 1 и 12, имеет еще делители: 2, 3, 4, 6.

Всякое число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется *простым*. Число, которое делится не только на единицу и само на себя, но еще и на другие числа, называется *составным*. Число 1 не причисляется ни к простым, ни к составным числам, оно занимает особое положение.

2. Таблица простых чисел. Для решения многих теоретических вопросов и практических задач большую помощь оказывают таблицы простых чисел. Поэтому еще в древности математики составляли эти таблицы. Очень простой способ составления таких таблиц нашел древнегреческий математик Эратосфен (III в. до н. э). Способ Эратосфена состоит в том, что из ряда натуральных чисел последовательно вычеркиваются все составные. Пусть, например, надо найти все простые числа в натуральном ряде от 1 до 30. Для этого выпишем все

* Здесь имеются в виду только натуральные числа.

натуральные числа от 1 до 30 в порядке возрастания. Первое из них, 1 — не простое, вычеркиваем его. Следующее за ним число 2 простое, оставляем, а каждое второе после 2, т. е. 4, 6, 8, ... вычеркиваем. Следующее простое число 3 оставляем, а каждое третье, начиная после 3, вычеркиваем. Следующее простое число 5, оставляем, а каждое пятое, начиная после 5, вычеркиваем (при этом считаем и уже вычеркнутые числа). В результате получаем:

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~.

Оставшиеся невычеркнутые числа

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 — простые, меньшие 30.

Такой способ составления таблиц простых чисел называют *«решетом Эратосфена»*.

Примечание. Если требуется составить таблицу простых чисел, не превышающих N, то указанным выше способом вычеркивают все составные числа, делящиеся на 2, 3, 5, и т. д. до наибольшего простого числа p, не превышающего $\sqrt{N}$. Например, если надо составить таблицу простых чисел, не превышающих 1000, надо вычеркнуть все составные, делящиеся на каждое простое число до 31 включительно.

В настоящее время имеются напечатанные таблицы простых чисел до двенадцати миллионов, а в библиотеке Венской Академии наук хранится рукописная таблица простых чисел до ста миллионов.

Однако уже известно много отдельных простых чисел, далеко выходящих за пределы даже самых больших таблиц.

На стр. 38 этого справочника приведена таблица простых чисел, не превышающих 6000.

3. **Свойства простых чисел.** Хотя изучением простых чисел занимались многие математики от древнейших времен до наших дней, простые числа и законы их размещения среди натуральных чисел таят в себе много нерешенных проблем.

Известно, что *последовательность простых чисел бесконечна* (теорема Евклида). Среди простых чисел есть много таких, разность которых равна 2, например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, ..., 179 и 181, ..., 10016957 и 10016959. Такие пары чисел называют простыми *числами-близнецами*. Есть предположение, что чисел-близнецов существует бесконечно много. Однако это не удается никому ни доказать, ни опровергнуть. Многие проблемы простых чисел можно было бы решить, если бы мы умели определять, сколько есть простых чисел, меньших любого натурального N. Однако этого мы сейчас еще не умеем делать. Известны только методы, дающие возможность приближенно находить количество простых чисел, меньших данного числа. В решении этой проблемы большое значение имеют работы ве-

ликого русского ученого П. Л. Чебышева (1821—1894). В наше время ряд вопросов теории простых чисел разрешен известным советским математиком И. М. Виноградовым (род. 1891).

Литература. И. Я. Депман, История арифметики, Учпедгиз, 1959.

В. Серпинский, Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, Физматгиз, М., 1963.

Э. Трост, Простые числа, Физматгиз, М., 1959.

4. Разложение чисел на простые множители. Разложить число на простые множители — значит представить его в виде произведения простых чисел.

Составное число разлагается на простые множители *единственным образом* (с точностью до порядка сомножителей). Это значит, что если, например, число 20 разложилось на две двойки и пятерку, то оно и всегда будет так разлагаться независимо от того, начнем ли мы разложение с множителей 2 или с 5:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

Способы разложения чисел на простые множители изложим на примерах.

Пример 1. Пусть требуется разложить на простые множители число 315. На основании признаков делимости 2 не будет делителем числа 315, а 3 будет делителем 315. Тогда пишем число 315, проводим справа от него вертикальную черту и справа от черты пишем найденный делитель 3, а под числом 315 — частное от деления 315 на 3, т. е. 105.

Далее с числом 105 поступаем так же и устанавливаем, что 105 тоже имеет 3 своим делителем. Пишем число 3 справа от 105 за чертой, а под числом 105 записываем число 35, являющееся частным от деления 105 на 3. Число 35 на 3 не делится, поэтому испытываем следующее по величине простое число 5. Выполнив с 35 те же операции, справа от 35 пишем 5, а под ним число 7. Так как 7 простое число, то делим его самого на себя, под ним пишем 1.

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Таким образом, этот процесс испытаний продолжаем до тех пор, пока не получим в частном 1. Числа, записанные справа от вертикальной черты, и составят все простые множители числа 315, т. е. $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Этот общий способ в некоторых случаях можно упрощать.

Пример 2. Разложить на простые множители 5600.

Решение. Замечаем, что $5600 = 56 \cdot 100$. Число 56 равно произведению $7 \cdot 8$, следовательно, равно произведению трех двоек и одной семерки. Число 100 равно произведению двух двоек и двух пятерок.

Поэтому

$$5600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Как видим, среди сомножителей разложения могут быть и равные числа. В таких случаях упрощают записи, используя понятие степени (стр. 51). Например, приведенное выше разложение записывают так:

$$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Такая запись числа в виде произведения степеней разных простых чисел называется *каноническим разложением* данного числа.

5. Разложение на множители больших чисел. Если данное число небольшое, или если оно делится на небольшое простое число, то его без особого труда можно разложить на множители. Но в общем случае разложение чисел на множители очень трудоемко. Например, не так легко разложить на множители сравнительно небольшое число 12091. Испытывая числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т. д., мы долгое время не можем обнаружить его делители. А ведь данное число не простое!

Несколько лет математики не могли разложить на множители число 549 755 813 881. И только недавно электронная вычислительная машина обнаружила, что это число (оно равно $2^{39} - 7$) простое.

§ 12. Общие делители и кратные

1. Делители числа. *Делителем данного числа называется число, на которое данное число делится без остатка.* Всякое простое число, например 13, имеет только два делителя: единицу и самого себя. Всякое составное число имеет более двух делителей, например число 6 имеет 4 делителя: 1, 2, 3 и 6. Чтобы найти делители данного составного числа, предварительно раскладывают его на простые множители; каждый из этих множителей будет простым делителем данного числа. Перемножением же простых множителей по два, по три, по четыре и т. д. получают составные делители данного числа.

Пример. Найти все делители числа 50.

Решение. $50 = 2 \cdot 5^2$, следовательно, 50 делится на 1, 2, 5, $2 \cdot 5$, 5^2, $2 \cdot 5^2$. Других делителей число 50 не имеет.

Ответ. 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Известно правило, по которому можно легко определять количество всех делителей данного числа. Для этого надо увеличить на единицу показатель степени каждого сомножителя канонического разложения данного числа и полученные числа перемножить.

Пример. Сколько делителей имеет число 5600?

Решение. $5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 36$.

Ответ. Число 5600 имеет 36 делителей.

2. Общий делитель нескольких чисел. *Общим делителем нескольких чисел называется число, на которое все данные числа делятся без остатка.* Например, числа 25 и 35 имеют общие делители: 1 и 5; числа 42 и 105 имеют общие делители: 1, 3, 7 и 21. Среди всех общих делителей всегда имеется наибольший. Это число называется *наибольшим общим делителем (НОД).* В наших примерах в первом случае НОД равен 5, во втором — 21.

Пишут: НОД (25, 35) = 5; НОД (42, 105) = 21.

Для нахождения наибольшего общего делителя нескольких чисел пользуются чаще всего двумя способами.

Первый способ — посредством *разложения на простые множители.* Чтобы найти НОД нескольких чисел, раскладывают каждое из этих чисел на простые множители и выписывают все *общие множители,* причем каждый из них берут с *наименьшим показателем,* встречающимся в этих разложениях.

Пример. Найти НОД чисел: 210, 1260 и 245.

Разложим эти числа на простые множители:
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $245 = 5 \cdot 7^2$. Тогда НОД будет $5 \cdot 7 = 35$.

Второй способ — посредством *последовательного деления.* Он называется еще *алгоритмом Евклида.* Чтобы найти НОД двух чисел, *делят большее число на меньшее,* и если получается остаток, то делят *меньшее число на остаток;* если снова получается остаток, то делят *первый остаток на второй.* Так продолжают делить до тех пор, пока в остатке не получится нуль. *Последний делитель и будет НОД данных чисел.*

Пример. Найти НОД чисел 391 и 299.

Разделив число 391 на 299, получим в остатке 92. Разделив 299 на 92, получим в остатке 23. Разделив 92 на 23, получим в остатке 0. Следовательно, 23 есть НОД чисел 391 и 299.

Запись удобно расположить так:

$$\begin{array}{r|l} 391 & 299 \\ \hline 299 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 299 & 92 \\ \hline 276 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 92 & 23 \\ \hline 92 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Чтобы найти таким способом НОД трех и более чисел, находят сначала наибольший общий делитель каких-нибудь двух из них, затем — наибольший общий делитель найденного делителя и какого-нибудь третьего данного числа и т. д.

3. Взаимно простые числа. Два или несколько чисел, наибольший общий делитель которых равен единице, называются *взаимно простыми.*

Примеры. Числа 15 и 22 взаимно просты; числа 7, 19, 32 и 84 взаимно просты; числа 18 и 15 не взаимно просты, так как НОД (18, 15) = 3.

Если данных чисел больше двух и каждые два из них взаимно просты, то такие числа называют *попарно взаимно простыми.*

Примеры. 6, 9 и 4 — числа взаимно просты, но не попарно взаимно просты; числа 8, 9, 7 и 55 — попарно взаимно просты.

4. Общее кратное чисел. *Общим кратным данных чисел называется любое натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел* (без остатка).

Например, числа 12, 24 и 36 являются общими кратными чисел 3 и 4.

5. Наименьшее общее кратное (НОК). Из всех общих кратных особый интерес представляет наименьшее общее кратное.

Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется самое меньшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел. Например, для трех чисел: 6, 15 и 20 наименьшее общее кратное есть 60, так как никакое число, меньшее 60, не делится на 6, на 15 и на 20, а 60 делится на эти числа.

Пишут: НОК (6, 15, 20) = 60.

Укажем два способа нахождения наименьшего общего кратного нескольких чисел.

Первый способ — посредством *разложения на простые множители. Чтобы найти НОК нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители, затем, взяв разложение одного из них, умножить его на недостающие простые множители из разложений других чисел.*

Пример. Найти НОК чисел 72 и 108.

Разложим данные числа на множители:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2,$$
$$108 = 2^2 \cdot 3^3.$$

Выпишем все множители числа 108 (это удобнее, так как число 108 больше 72) и, добавив множитель 2, который еще дополнительно имеется в числе 72, получим:

$$\text{НОК } (72, 108) = 2^3 \cdot 3^3 = 216.$$

Если большее из данных чисел делится на все остальные, то оно и будет наименьшим общим кратным этих чисел. Например, НОК (60, 120, 40) = 120.

Если никакая пара данных чисел не имеет общих множителей отличных от единицы, то для нахождения наименьшего общего крат-

ного данных чисел их нужно перемножить. Например, наименьшее общее кратное чисел 7, 8 и 11 равно их произведению, т. е. НОК (7, 8, 11) $= 7 \cdot 8 \cdot 11 = 616$.

Второй способ. Известно, что НОК $(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}\,(a, b)}$, т. е.: *наименьшее общее кратное двух чисел равно произведению этих чисел, деленному на их наибольший общий делитель* *.

Используя эту зависимость, можно определить НОК.

Пример. Найти НОК чисел 360 и 70. Так как НОД (360, 70) $=$ $= 10$, то НОК (360, 70) $= 360 \cdot 70 : 10 = 2520$.

Чтобы найти этим способом наименьшее общее кратное трех и более чисел, сначала находят наименьшее общее кратное каких-нибудь двух из них, потом — наименьшее общее кратное этого наименьшего кратного и какого-нибудь третьего данного числа и т. д.

§ 13. Недесятичные системы счисления

1. Систематические числа. Общепринятая сейчас система счисления называется *десятичной*, потому что по этой системе 10 единиц одного разряда составляют единицу следующего высшего разряда. В десятичной системе все числа записываются с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Если мы пишем, например, число 3827, то понимаем, что оно состоит из 3 тысяч, 8 сотен, 2 десятков и 7 единиц:

$$3827 = 3000 + 800 + 20 + 7,$$

или

$$3827 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7.$$

Говорят: *основанием* десятичной системы счисления есть число 10.

Однако возможны и недесятичные системы счисления. Можно считать не десятками, а, например, пятерками. Тогда 5 единиц первого разряда будут составлять одну единицу второго, а 5 единиц второго — одну единицу третьего разряда и т. д. В этом случае будем иметь систему счисления с основанием 5. Ее называют *пятеричной системой счисления*. Для записи чисел в пятеричной системе достаточно иметь пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4.

Возможны также *двоичная*, *троичная*, *двенадцатеричная* и другие системы счисления.

Чтобы не смешивать числа, записанные в различных системах, принято правее и несколько ниже последней цифры в скобках писать основание системы **. Например, числа $214_{(5)}$, $1011_{(2)}$, $299_{(12)}$ записаны

---

* В. М. Брадис, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1954, стр. 68.

** Но иногда пишут и без скобок.

соответственно в пятеричной, двоичной и двенадцатеричной системах. Это значит, что

$$214_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4,$$
$$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1,$$
$$299_{(12)} = 2 \cdot 12^2 + 9 \cdot 12 + 9.$$

Очевидно, в качестве основания системы счисления можно взять любое натуральное число, большее 1. Если за основание взять число g, тогда для записи любого числа достаточно иметь g цифр: 0, 1, 2, 3, . . . , $g - 1$. Числа, записанные в системе счисления при основании g в виде $g^n a_n + g^{n-1} a_{n-1} + \cdots + g a_1 + a_0$, где a_0, a_1, . . ., a_n — цифры, называются вообще *систематическими*.

Примечание. Для изображения чисел по системе счисления, у которой основание превосходит 10, недостаточно наших цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Например, для двенадцатеричной системы пришлось бы ввести особые знаки для 10 и 11, потому что наши обозначения этих чисел выражали бы тогда другие числа, а именно: 10 означало бы 1 единицу 2-го разряда, т. е. дюжину, а 11 означало бы 1 единицу 2-го разряда и 1 единицу 1-го разряда, т. е. 13.

2. Переход от одной системы счисления к другой. Для перехода от одной системы к другой достаточно уметь:

а) переходить от любой системы счисления к десятичной;

б) переходить от десятичной системы к другой системе.

Переход от любой системы к десятичной выполняется путем прямого вычисления.

Пример. Дано число $3021_{(4)}$, записать его в десятичной системе.

Решение. $3021_{(4)} = 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 + 1 = 192 + 8 + 1 = 201$.

Переход от десятичной системы к другой покажем на примере. Число 856 записать при основании 4.

Устанавливаем, сколько четверок содержится в числе 856: $856 : 4 = 214$. Значит, число состоит из 214 единиц 2-го разряда (214 четверок). Сосчитаем единицы 2-го разряда четверками; делим 214 на 4; получаем 53 единицы 3-го разряда и 2 единицы 2-го разряда. Ведем теперь счет единиц 3-го разряда четверками; делим 53 на 4 и получаем 13 единиц 4-го разряда и одну единицу 3-го разряда. Делим теперь 13 на 4. Результат счета единиц 4-го разряда: 3 единицы 5-го разряда и одна единица 4-го разряда.

На письме этот процесс оформляют так:

856	4			
856	214	4		
I р. 0	212	53	4	
	II р. 2	52	13	4
		III р. 1	12	3
			IV р. 1	V р.

Значит, данное число содержит 3 единицы 5-го разряда, 1 единицу 4-го разряда, 1 единицу 3-го разряда, 2 единицы 2-го разряда и 0 единиц 1-го разряда. Это число запишется так: $31120_{(4)}$. Таким образом, $856_{(10)} = 31120_{(4)}$.

3. Арифметические действия над систематическими числами. Сложение. Отыскание суммы сводится к сложению единиц одного и того же разряда, начиная с единиц 1-го разряда, и к преобразованию суммы единиц низшего разряда в высший, если эта сумма — число двузначное. Поэтому сложение можно производить непосредственно, как и в десятичной системе, используя таблицу сложения однозначных чисел.

Например, в системе счисления с основанием 4 таблица сложения имеет такой вид:

$$\begin{array}{lll} 0+0=0 & 1+1=2 & 2+2=10 \\ 0+1=1 & 1+2=3 & 2+3=11 \\ 0+2=2 & & \\ 0+3=3 & 1+3=10 & 3+3=12 \end{array}$$

Пример. Сложить числа $2103_{(4)}$ и $1312_{(4)}$.

Решение.

$$\begin{array}{r} 2103_{(4)} \\ +\ 1312_{(4)} \\ \hline 10021_{(4)} \end{array}$$

Еще проще таблица сложения в двоичной системе счисления:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+1=10.$$

Пример.

$$\begin{array}{r} 110101_{(2)} \\ +\ 1100011_{(2)} \\ \hline 10011000_{(2)} \end{array}$$

Вычитание. Вычитание выполняем так же, как и в десятичной системе: подписываем вычитаемое под уменьшаемым и производим вычитание чисел, являющихся цифрами единиц соответствующих разрядов, начиная с 1-го; если вычитание единиц невозможно, производим в уменьшаемом раздробление единицы следующего высшего разряда и т. д.

Пример. Вычислить разность $2301_{(4)} - 1223_{(4)}$.

Решение.

$$\begin{array}{r} 2301_{(4)} \\ -\ 1223_{(4)} \\ \hline 1012_{(4)} \end{array}$$

От одной единицы 1-го разряда нельзя отнять 3, а единиц 2-го разряда в уменьшаемом нет, тогда берем одну единицу 3-го разряда, она содержит четыре единицы 2-го разряда, из них три оставляем на месте единиц 2-го разряда, а одну раздробим в единицы 1-го разряда, получим четыре единицы 1-го разряда, плюс одна единица 1-го разряда, которая у нас

есть, всего имеем пять единиц, которые при основании $g = 4$ запишутся как 11. Дальше вычитаем поразрядно: разность единиц 1-го разряда: $11 - 3 = 2$; разность единиц 2-го разряда: $3 - 2 = 1$; 3-го разряда: $2 - 2 = 0$; 4-го разряда: $2 - 1 = 1$. Результат: $1012_{(4)}$.

Умножение. Умножение выполняется так же, как и в десятичной системе: подписываем множитель под множимым и производим умножение, используя таблицу умножения.

Так, при $g = 7$ таблица примет вид:

$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 12$	$4 \cdot 4 = 22$	$5 \cdot 5 = 34$
$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 4 = 15$	$4 \cdot 5 = 26$	$5 \cdot 6 = 42$
$0 \cdot 2 = 0$	$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 4 = 11$	$3 \cdot 5 = 21$	$4 \cdot 6 = 33$	$6 \cdot 6 = 51$
$0 \cdot 3 = 0$	$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 5 = 13$	$3 \cdot 6 = 24$		
$0 \cdot 4 = 0$	$1 \cdot 5 = 5$	$2 \cdot 6 = 15$			
$0 \cdot 5 = 0$	$1 \cdot 6 = 6$				
$0 \cdot 6 = 0$					

Пример. Вычислим $2034_{(7)} \cdot 5_{(7)}$.

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\ 2034_{(7)} \\ \underline{\qquad 5_{(7)}} \\ 13236_{(7)} \end{array}$$

Вычисляем: $4 \cdot 5 = 26$; 6 — цифра единиц; 2 прибавляем к произведению $3 \cdot 5$; $3 \cdot 5 + 2 = 21 + 2 = 23$; цифра единиц 2-го разряда 3; 2 прибавляем к произведению $0 \cdot 5$; $0 \cdot 5 + 2 = 2$; 2 — цифра единиц 3-го разряда; $2 \cdot 5 = 13$; 3 — цифра единиц 4-го разряда и 1 — цифра единиц 5-го разряда. Результат: $13236_{(7)}$.

В двоичной системе таблица умножения следующая:

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример.

$$\begin{array}{r} \times\ 101_{(2)} \\ \underline{\quad 110_{(2)}} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 11110_{(2)} \end{array}$$

Деление. Деление систематических чисел основано на тех же приемах, что и в случае $g = 10$.

Пример: Вычислить частное $23604_{(7)} : 51_{(7)}$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 23604_{(7)} & 51_{(7)} \\ \underline{-213} & \overline{332_{(7)}} \\ 230 & \\ \underline{-213} & \\ 144 & \\ \underline{-132} & \\ 12_{(7)} & \end{array}$$

Делитель — число двузначное, отделяем в делимом слева направо две цифры. Они выражают число всех единиц 4-го разряда, но $23_{(7)} < 51_{(7)}$, поэтому берем в делимом трехзначное число $236_{(7)}$ и делим на $51_{(7)}$; в частном получаем 3 единицы 3-го разряда; умножаем $51 \cdot 3$ и полученное произведение 213 вычитаем из 236, остаток 23 раздробим в единицы 2-го разряда и продолжаем деление, пока не получим остаток, меньший делителя.

4. Краткие исторические сведения о системах счисления. Человечество не сразу пришло к десятичной системе счисления. Одной из древнейших была пятеричная система счисления.

К III—II тысячелетиям до н. э. относится шумеро-вавилонская система счисления, основанием которой являлось число 60. Эта система имела значительные достоинства, так как число 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, тогда как основание нашей системы 10 имеет только 4 делителя: 1, 2, 5 и 10. Остатки шестидесятеричной системы сохранились до сих пор (деление круга на 360°, деление градуса на 60 *мин* и на 3600 *сек*, деление часа на 60 *мин* и на 3600 *сек*). У народов, населявших в древности Европу, применялась система счисления с основанием двадцать, следы которой сохранились во французском и английском языках.

В различных языках остались также следы двенадцатеричной системы счисления (русское «дюжина» — 12, немецкое «гросс» равно 12^2). Некоторые ученые в XVIII в. предлагали даже заменить ею (как более удобною) десятичную систему.

Едва ли не самой древней была двоичная система счисления. В последнее время эта система нашла практическое применение в электронных счетных машинах: здесь важно то преимущество, что в ней пользуются только двумя цифрами: 0 и 1, а их легко передавать двумя операциями с электронными лампами: включением и выключением.

Таким образом, одно из древнейших достижений человеческой культуры возродилось на новой технической основе.

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

§ 14. Обыкновенные дроби

1. Доли единицы. Когда мы говорим, что от дома до школы полчаса ходьбы, то выражаем время не в целых часах, а в частях часа. Если одно яблоко нужно разделить поровну между тремя мальчиками, то каждый из них может получить только треть яблока, или третью его часть. В этих случаях мы имеем дело не с целыми

единицами, а с их частями, или *долями* единицы. Доли могут быть самые разнообразные, например сантиметр есть сотая доля метра, грамм есть тысячная доля килограмма, минута есть шестидесятая доля часа и т. д.

2. **Дробные числа.** *Число, составленное из одной или нескольких равных долей единицы, называется дробью* (обыкновенной дробью). Например, 1 десятая, 3 пятых, 12 седьмых — дроби.

Числа, в состав которых входит целое число и дробь, называются *смешанными* числами. Например, если 5 яблок разделить между двумя мальчиками, то число яблок у каждого мальчика выразится целым числом (два) и некоторой дробью (половина), т. е. смешанным числом.

Дроби и смешанные числа вместе называют *дробными числами*. Получаются дробные числа в результате измерений и деления.

3. Изображение дроби. Дробь изображают с помощью двух натуральных чисел и дробной *черты*. Под чертой пишут число, показывающее, на сколько долей разделена единица. Оно называется *знаменателем* дроби. Над чертой пишут число, показывающее, сколько таких долей содержится в дроби. Оно называется *числителем* дроби. Числитель и знаменатель называются *членами дроби*. Например, у дроби $\frac{5}{7}$ числитель равен 5, а знаменатель 7. Читают дроби так: сначала называют числитель, потом — знаменатель, например:

$$\frac{2}{7} \text{ — «две седьмых».}$$

Примечание. Дроби $\frac{100}{25}$ и $\frac{120}{5}$ читаются одинаково: «сто двадцать пятых». В подобных случаях надо между произношением числителя и знаменателя делать паузу.

Смешанные числа изображают так: сначала пишут целое число, а затем рядом с ним справа приписывают дробь. Например, смешанное число «два и четыре пятых» записывают: $2\frac{4}{5}$.

4. Правильные и неправильные дроби. Различают дроби правильные и неправильные. Дробь называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя. Если же числитель больше знаменателя или равен ему, такая дробь называется *неправильной*. Например, дроби

$$\frac{1}{2}, \frac{10}{11}, \frac{3}{125} \text{ — правильные,}$$

$$\frac{3}{2}, \frac{37}{37}, \frac{100}{7} \text{ — неправильные.}$$

Правильная дробь меньше единицы, а неправильная — больше или равна единице.

5. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование. Чтобы обратить неправильную дробь в смешанное число, нужно числитель дроби разделить на знаменатель и найти остаток; частное покажет число целых единиц, а остаток — число долей единицы.

Пример. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, так как $20 : 3 = 6$ (остаток 2).

Чтобы обратить смешанное число в неправильную дробь, нужно знаменатель умножить на целое число, к полученному произведению прибавить числитель и сделать эту сумму числителем искомой дроби, а знаменатель оставить прежний.

Пример. $7\frac{2}{9} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{9} = \frac{65}{9}$.

6. Сравнение дробей по величине. *Две дроби считаются равными, если величины, выражаемые этими числами при одной и той же единице измерения, равны между собой.* Например, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, так как две длины, из которых одна составляет $\frac{3}{4}$ *м*, а другая $\frac{6}{8}$ *м*, равны (рис. 3).

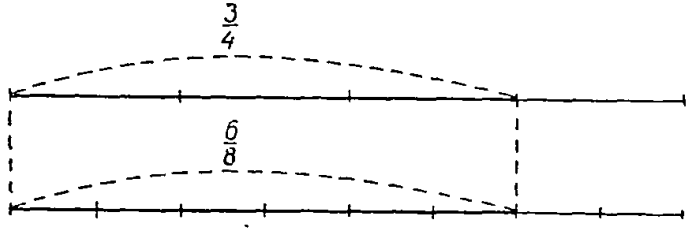


Рис. 3.

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой больший числитель. Например, $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, так как $5 > 3$.

Из двух дробей с одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше. Например $\frac{6}{7} > \frac{6}{11}$, поскольку $7 < 11$.

В общем случае дроби сравниваются по величине так. Умножают числитель первой дроби на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй. Если первое из этих произведений больше

(равно или меньше) второго, значит и первая дробь соответственно больше (равна или меньше) второй.

Примеры. $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$, так как $5 \cdot 9 > 6 \cdot 7$;

$\frac{5}{8}$ равно $\frac{10}{16}$, так как $5 \cdot 16 = 8 \cdot 10$;

$\frac{10}{7} < \frac{9}{6}$, так как $10 \cdot 6 < 7 \cdot 9$.

В некоторых случаях соотношение между дробями легче установить путем сравнения их с единицей или половиной.

Пример 1. Сравнить дроби $\frac{15}{17}$ и $\frac{36}{35}$.

$\frac{15}{17} < 1$, а $\frac{36}{35} > 1$, следовательно, $\frac{15}{17} < \frac{36}{35}$.

Пример 2. Сравнить дроби $\frac{16}{31}$ и $\frac{27}{56}$.

$\frac{16}{31} > \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} = \frac{16}{32}$;

$\frac{27}{56} < \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} = \frac{27}{54}$.

Следовательно, $\frac{16}{31} > \frac{27}{56}$.

§ 15. Изменение величины дроби с изменением ее членов

1. **Кратное изменение числителя и знаменателя.** Поскольку дробь можно рассматривать как частное от деления двух чисел, то при изменении членов дроби ее величина изменяется так же, как изменяется частное при изменении делимого и делителя (см. стр. 57).

Если числитель дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, не изменяя знаменателя, то величина дроби соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

Пример. Возьмем дробь $\frac{2}{5}$ и увеличим ее числитель в 2 раза. Получим дробь $\frac{4}{5}$, в 2 раза большую первоначальной (рис. 4).

Если знаменатель дроби увеличить или уменьшить в несколько раз, то величина дроби соответственно уменьшится или увеличится

во столько же раз. Если, например, знаменатель дроби $\frac{1}{3}$ увеличить в 2 раза, то величина дроби уменьшится в 2 раза (рис. 5).

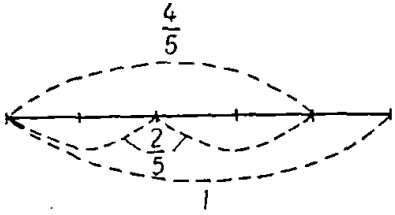


Рис. 4.

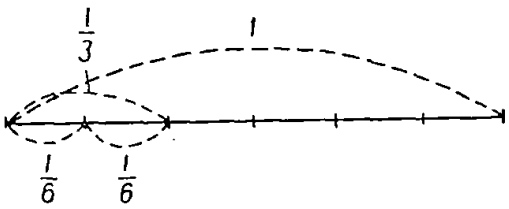


Рис. 5.

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель ее умножить на одно и то же число (или, что то же самое, увеличить в одинаковое число раз). Это утверждение называют *основным свойством дроби*.

В общем виде это свойство дроби можно записать так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Отсюда следует, что *величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель ее разделить на одно и то же число* (или, что то же самое, уменьшить в одинаковое число раз).

Пример. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$ и, наоборот,

$\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (рис. 6).

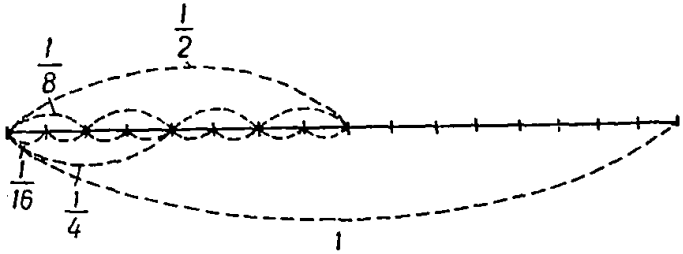


Рис. 6.

С увеличением числителя и знаменателя на одно и то же число дробь увеличивается, если она правильная, и уменьшается, если она неправильная и не равна единице.

Примеры. $\frac{3}{5}<\frac{3+1}{5+1}=\frac{4}{6}$; $\frac{7}{6}>\frac{7+1}{6+1}=\frac{8}{7}$.

§ 16. Преобразование дробей

1. Сокращение дроби. *Сокращением дроби* называется замена ее другой, равной ей дробью с меньшими членами, путем деления числителя и знаменателя на их общий делитель.

Есть несколько способов сокращения дробей.

Первый способ. *Последовательное сокращение* на общие делители числителя и знаменателя.

Пример. $\frac{72}{96}=\frac{36}{48}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

Второй способ. *Полное сокращение* на наибольший общий делитель числителя и знаменателя.

Пример. Сократить дробь $\frac{840}{3600}$.

Решение. НОД (840, 3600) = 120. Поэтому можно сразу сократить на 120:

$$\frac{840}{3600}=\frac{7}{30}.$$

Третий способ. Рассмотренными способами сокращают дроби в тех случаях, когда числитель и знаменатель легко разложить на множители. Если это не удается сделать быстро, пользуются *алгоритмом Евклида* (см. стр. 77).

Пример. Сократить дробь $\frac{12091}{14017}$.

Решение.

```
                                        14017 | 12091
                                        12091   ------
                                        ------    1
                                 12091 | 1926
                                 11556   ------
                                 ------    6
                          1926 | 535
                          1605   ------
                          ----     3
                     535 | 321
                     321   ------
                     ---     1
                321 | 214
                214   ------
                ---     1
           214 | 107
           214   ------
           ---     2
            0
```

Как видим, НОД (14017, 12091) = 107. Поэтому

$$\frac{12091}{14017}=\frac{113}{131}.$$

Если члены дроби не имеют общих делителей, то дробь называется *несократимой*. У такой дроби числитель и знаменатель взаимно простые числа. Две несократимые дроби равны только тогда, когда у них равны и числители, и знаменатели. Любая дробь равна одной и только одной несократимой дроби.

2. Раздробление дробей. Чтобы выразить дробь в меньших долях единицы, не изменяя ее величины, надо увеличить числитель и знаменатель в одно и то же число раз. Выражение дроби в меньших долях единицы называют *раздроблением* дробей.

Пример. Выразить дробь $\frac{4}{5}$ в пятнадцатых долях единицы.

Имеем:

$$\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{12}{15}.$$

3. Приведение дробей к общему знаменателю. *Привести дроби к общему знаменателю* — значит выразить их в одинаковых частях единицы без изменения величины дроби. Обычно приводят дроби к *наименьшему* общему знаменателю.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, поступают так: сокращают дроби, если это возможно; находят НОК всех знаменателей; вычисляют для каждой дроби частное от деления найденного НОК на ее знаменатель, т. е. *дополнительные множители*; умножают оба члена каждой дроби на соответствующий ей дополнительный множитель.

Пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{5}{72}$ и $\frac{7}{48}$.

Решение. НОК (72, 48) = 144. Дополнительные множители: 144 : 72 = 2, 144 : 48 = 3. Следовательно,

$$\frac{5}{72}=\frac{5\cdot 2}{72\cdot 2}=\frac{10}{144},\quad \frac{7}{48}=\frac{7\cdot 3}{48\cdot 3}=\frac{21}{144}.$$

§ 17. Арифметические действия над обыкновенными дробями

1. Сложение. Суммой дробей с одним и тем же знаменателем называют дробь, имеющую тот же знаменатель, а числитель равен сумме числителей данных дробей, т. е.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Это определение можно сформулировать также в виде следующего правила.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Пример. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$.

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, надо привести их к наименьшему общему знаменателю, а затем сложить полученные числители и под суммой подписать общий знаменатель.

Пример. $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$.

Короче записывают так: $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$.

Чтобы сложить смешанные числа, нужно отдельно найти сумму целых и сумму дробных частей. Действие записывается так:

$$4\frac{7}{15}+1\frac{11}{45}+8\frac{4}{9}=13\frac{21+11+20}{45}=13\frac{52}{45}=14\frac{7}{45}.$$

2. Вычитание. *Вычитание* дробей можно определить как *действие, обратное сложению дробей.* Вычесть из одного дробного числа второе это значит найти третье число, которое в сумме со вторым дает первое. Из этого определения следует правило:

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и оставить прежний знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Чтобы вычесть дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под их разностью подписать общий знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}.$$

Если нужно вычесть одно смешанное число из другого смешанного числа, то, если можно, вычитают дробь из дроби, а целое из целого. Действие записывают так:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=3\frac{36-33}{44}=3\frac{3}{44}.$$

Если же дробь вычитаемого больше дроби уменьшаемого, то берут одну единицу из целого числа уменьшаемого, раздробляют

ее в надлежащие доли и прибавляют к дроби уменьшаемого, после чего поступают, как описано выше. Действие записывают так:

$$5\frac{4}{9} - 1\frac{11}{12} = 4\frac{16-33}{36} = 3\frac{52-33}{36} = 3\frac{19}{36}.$$

Аналогично поступают, когда надо вычесть из целого числа дробное.

Пример. $3 - 2\frac{3}{5} = 2\frac{5}{5} - 2\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

3. Распространение свойств сложения и вычитания на дробные числа. Все законы и свойства сложения и вычитания натуральных чисел (см. стр. 51) справедливы и для дробных чисел. Их применение во многих случаях значительно упрощает процесс вычисления.

Пример 1. $4\frac{3}{4} + 1\frac{7}{9} + 2\frac{5}{12} + 5\frac{2}{9} + \frac{7}{12} + 3\frac{1}{4} = \left(4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}\right) + \left(1\frac{7}{9} + 5\frac{2}{9}\right) + \left(2\frac{5}{12} + \frac{7}{12}\right) = 8 + 7 + 3 = 18.$

Здесь использованы переместительный и сочетательный законы сложения.

Пример 2. $2\frac{7}{720} + \left(3\frac{31}{144} + \frac{53}{720}\right) = \left(2\frac{7}{720} + \frac{53}{720}\right) + 3\frac{31}{144} = 2\frac{60}{720} + 3\frac{31}{144} = 5\frac{12+31}{144} = 5\frac{43}{144}$.

Здесь использовано правило прибавления суммы к числу.

Пример 3. $43\frac{29}{36} - \left(15\frac{11}{36} - 4\frac{1}{2}\right) = \left(43\frac{29}{36} - 15\frac{11}{36}\right) + 4\frac{1}{2} = 28\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 33.$

Пример 4. $17\frac{7}{8} - \left(2\frac{3}{5} + 6\frac{7}{8}\right) = \left(17\frac{7}{8} - 6\frac{7}{8}\right) - 2\frac{3}{5} = 11 - 2\frac{3}{5} = 8\frac{2}{5}$.

Здесь использованы правила вычитания из числа разности и суммы.

4. Умножение. Умножение дроби на целое число можно понимать так же, как и умножение целого числа на целое, т. е. как сложение одинаковых слагаемых. Например,

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}.$$

Но для умножения на дробь такое толкование не подходит. Напри-

мер, умножая $\frac{3}{7}$ на $\frac{2}{3}$, нельзя сказать, что здесь «$\frac{3}{7}$ надо взять $\frac{2}{3}$ раза слагаемым».

Здесь необходимо дать новое определение.

Произведением дробей называют такую дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей, т. е. $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} = \frac{a \cdot b}{m \cdot n}$. Это определение не является произвольным измышлением. Оно вытекает из необходимости сохранить за действием умножения ту роль, которую оно играло в теории и практике, пока мы рассматривали только целые числа, а также те свойства, которыми обладает умножение целых чисел (см. стр. 53). В частности, при таком определении те задачи, которые в случае целых числовых данных решаются умножением, в случае дробных числовых данных также можно решать умножением.

Из приведенного определения вытекает правило умножения дробей:

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

При умножении следует делать (если возможно) сокращение.

Пример. $\frac{12}{19} \cdot \frac{19}{30} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}} \cdot \cancel{19}}{\cancel{19} \cdot \underset{5}{\cancel{30}}} = \frac{2}{5}$.

Если учесть, что целое число представляет собой дробь со знаменателем 1, то умножение дроби на целое число и целого числа на дробь можно выполнять по этому же правилу.

Примеры. $\frac{2}{13} \cdot 7 = \frac{2}{13} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{13} = 1\frac{1}{13}$;

$$6 \cdot \frac{5}{12} = \frac{6}{1} \cdot \frac{5}{12} = \frac{30}{12} = 2\frac{1}{2}.$$

5. Умножение смешанных чисел. Чтобы перемножить смешанные числа, нужно предварительно обратить их в неправильные дроби и потом перемножать по правилу умножения дробей.

Пример. $1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{80}{10} = 8$.

Если же перемножают смешанное число на целое, то проще множить отдельно целую часть и дробную часть.

Пример. $2\frac{3}{5} \cdot 3 = 6\frac{9}{5} = 7\frac{4}{5}$.

6. Распространение свойств умножения на дробные числа. Свойства умножения натуральных чисел (см. стр. 53) справедливы и для дробей. Их использование упрощает устные и письменные вычисления.

Пример 1. $7\frac{2}{15} \cdot 30 = \left(7 + \frac{2}{15}\right) \cdot 30 = 210 + 4 = 214.$

Пример 2. $9\frac{7}{8} \cdot 8 = 9 \cdot 8 + \frac{7}{8} \cdot 8 = 72 + 7 = 79.$

Пример 3. $\frac{3}{4} \cdot \left(7\frac{9}{31} \cdot 1\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot 7\frac{9}{31} = 1 \cdot 7\frac{9}{31} = 7\frac{9}{31}.$

Пример 4. $\left(12\frac{2}{5} \cdot 43\frac{5}{17}\right) \cdot \frac{5}{31} = \left(\frac{62}{5} \cdot \frac{5}{31}\right) \cdot 43\frac{5}{17} = 2 \cdot 43\frac{5}{17} = 86\frac{10}{17}.$

7. Деление дробей. Для деления дробей сохраняется то же определение, что и для деления целых чисел: это — действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается второй сомножитель. Разделить одно число на второе — значит найти такое третье число, которое при умножении на второе дает первое. Выполняют деление дробей по следующему правилу.

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$

Пример. $\frac{6}{7} : \frac{9}{10} = \frac{6 \cdot 10}{7 \cdot 9} = \frac{60}{63} = \frac{20}{21}.$

По этому же правилу можно выполнять деление дроби на целое число и целого на дробь, если представить целое число в виде дроби со знаменателем 1.

Примеры. $15 : \frac{5}{7} = \frac{15}{1} : \frac{5}{7} = \frac{15 \cdot 7}{1 \cdot 5} = \frac{21}{1} = 21;$

$$\frac{8}{13} : 2 = \frac{8}{13} : \frac{2}{1} = \frac{8 \cdot 1}{13 \cdot 2} = \frac{4}{13}.$$

Однако в последнем примере проще числитель разделить на целое число:

$$\frac{8}{13} : 2 = \frac{8 : 2}{13} = \frac{4}{13}.$$

8. Деление смешанных чисел. Чтобы выполнить деление смешанных чисел, их предварительно обращают в неправильные дроби и затем делят по правилу деления дробей.

Пример. $12\frac{3}{5} : 1\frac{1}{20} = \frac{63}{5} : \frac{21}{10} = \frac{63 \cdot 20}{5 \cdot 21} = 12.$

Однако при делении смешанного числа на целое бывает удобней делить отдельно целую часть и отдельно дробную часть смешанного числа.

Пример. $30\frac{5}{7} : 5 = 6\frac{1}{7}.$

9. Замена деления умножением. Если в какой-нибудь дроби поменять местами числитель и знаменатель, получится новая дробь, *обратная* данной. Например, для дроби $\frac{8}{7}$ обратная дробь будет $\frac{7}{8}$.

Очевидно, что произведение двух взаимно обратных дробей равно 1.

$$\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1.$$

Учитывая это, можно деление выполнять по следующему правилу.

Чтобы разделить одно число на другое, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример 1. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}.$

Пример 2. $14 : \frac{7}{8} = 14 \cdot \frac{8}{7} = \frac{14 \cdot 8}{7} = 16.$

Пример 3. $\frac{4}{7} : 5\frac{1}{3} = \frac{4}{7} : \frac{16}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{28}.$

10. Примеры на все действия с обыкновенными дробями. Решение примеров на все действия с дробями выполняют с помощью записи по отдельным действиям или записи цепочкой.

Пример. Вычислить:

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{21} + \frac{15}{28} : \frac{5}{84}}{5 : \frac{1}{2} + 10} + \frac{2 : \frac{1}{2} + 3 : \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : 2 + \frac{1}{3} : 3} \cdot \frac{1}{36} - \frac{16}{35}.$$

Решение по частям.

1) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{21} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 21} = \frac{1}{7}$;

2) $\frac{15}{28} : \frac{5}{84} = \frac{15 \cdot 84}{28 \cdot 5} = 9$;

3) $\frac{1}{7} + 9 = 9\frac{1}{7}$;

4) $5 : \frac{1}{2} = 10$;

5) $10 + 10 = 20$;

6) $9\frac{1}{7} : 20 = \frac{64}{7 \cdot 20} = \frac{16}{35}$;

7) $2 : \frac{1}{2} = 4$;

8) $3 : \frac{1}{3} = 9$;

9) $4 + 9 = 13$;

10) $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$;

11) $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}$;

12) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$;

13) $13 : \frac{13}{36} = \frac{13 \cdot 36}{13} = 36$;

14) $36 \cdot \frac{1}{36} = 1$;

15) $\frac{16}{35} + 1 - \frac{16}{35} = 1$.

Ответ. 1.

Пример вычисления цепочкой:

$$\frac{\left(8\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) : 3\frac{1}{2}}{\left(5 - 4\frac{2}{5}\right) : 10} + \frac{\left(3\frac{1}{8} - 1\frac{7}{8}\right) \cdot 1\frac{3}{5}}{\left(2 - 1\frac{3}{8}\right) : 3\frac{1}{8}} = \frac{7\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}}{\frac{3}{5} : 10} + \frac{1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5}}{\frac{5}{8} : 3\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}} + \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{25}} = \frac{\frac{15}{7}}{\frac{3}{50}} + \frac{2}{\frac{1}{5}} = \frac{15}{7} \cdot \frac{50}{3} + 2 \cdot 5 = \frac{250}{7} + 10 =$$

$$= 35\frac{5}{7} + 10 = 45\frac{5}{7}.$$

§ 18. Основные типы задач на дроби

1. Нахождение дроби от числа. Существует много задач, в которых требуется найти часть или дробь данного числа. Такие задачи решают умножением.

Задача. Хозяйка имела 20 руб.; $\frac{2}{5}$ их она израсходовала на покупки. Сколько стоят покупки?

Здесь требуется найти $\frac{2}{5}$ числа 20. Сделать это можно так:

$$20 \cdot \frac{2}{5} = 8.$$

Ответ. Хозяйка израсходовала 8 руб.

В этой задаче: 20 — данное число, $\frac{2}{5}$ — дробь, выражающая искомую часть, 8 — искомая часть данного числа.

Примеры. Найти $\frac{7}{15}$ от 30. Решение. $30 \cdot \frac{7}{15} = 14$.

Найти $\frac{5}{3}$ от $20\frac{2}{5}$. Решение. $20\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = 34$.

В последнем примере найдена не часть от числа, так как 34 больше $20\frac{2}{5}$. Поэтому в общем случае говорят: найдена дробь от числа.

Чтобы найти дробь от данного числа, нужно данное число умножить на эту дробь.

2. Нахождение числа по известной величине его дроби. Иногда требуется по известной части числа и дроби, выражающей эту часть, определить все число. Такие задачи решаются делением.

Задача. В классе 12 комсомольцев, что составляет $\frac{3}{5}$ части всех учащихся класса. Сколько всех учащихся в классе?

Решение. $12 : \frac{3}{5} = 20$.

Ответ. 20 учащихся.

Пример. Найти число, $\frac{5}{3}$ которого составляет 34.

Решение. $34 : \frac{5}{3} = 20\frac{2}{5}$.

Ответ. Искомое число равно $20\frac{2}{5}$.

Такие задачи называют задачами на нахождение числа по известной величине его дроби.

Чтобы найти число по известной величине его дроби, надо поделить эту величину на данную дробь.

3. Нахождение отношения двух чисел. Рассмотрим задачу:

Рабочий изготовил за день 40 деталей. Какую часть месячного задания выполнил рабочий, если месячный план составляет 400 деталей?

Решение. $40 : 400 = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$.

Ответ. Рабочий выполнил $\frac{1}{10}$ часть месячного плана.

В данном случае часть (40 деталей) выражено в долях целого (400 деталей). Говорят также, что найдено отношение числа изготовленных за день деталей к месячному плану.

4. Более сложные задачи на дроби.

Задача 1. На одной фабрике число работающих женщин составляет $\frac{1}{3}$ числа работающих мужчин на этой фабрике. Какую часть составляют женщины от общего числа работающих на фабрике?

Решение. Женщины составляют $\frac{1}{3}$ числа мужчин, следовательно, мужчин было 3 части, а женщин 1 часть. Всего работающих было 3 части $+$ 1 часть $=$ 4 части. Женщины составляли $\frac{1}{4}$ часть от общего числа работающих на фабрике.

Задача 2. В классе число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ числа присутствующих. После того как из класса ушел еще один ученик, число отсутствующих оказалось равным $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Решение. Если число учеников класса примем за 1, то число отсутствующих составит $1 : (1 + 6) = \frac{1}{7}$ всего числа учеников; во втором случае число отсутствующих увеличилось на 1; оно составляло: $1 : (1 + 5) = \frac{1}{6}$ всего числа учеников; $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$; следовательно, один ученик составляет $\frac{1}{42}$ часть всех учащихся класса, поэтому в классе всего 42 ученика.

Ответ. 42 ученика.

§ 19. Десятичные дроби

1. Десятичная дробь, ее запись и чтение. Отдельным видом обыкновенных дробей есть дроби, знаменателями которых являются числа, изображенные (в десятичной системе счисления) единицей с последующими нулями, например

$$\frac{3}{10},\ \frac{17}{100},\ \frac{241}{100},\ \frac{1}{100000}.$$

Такие дроби называют *десятичными*.

Десятичные дроби записывают без знаменателя, при этом используется тот же принцип, что и для целых чисел, а именно: значение

каждой цифры зависит от места, на котором она стоит. В десятичных дробях целую часть отделяют запятой, а справа от запятой записывают дробную часть. Цифры дробной части называют *десятичными знаками*. Первый десятичный знак — это десятые части единицы, или просто десятые, второй — сотые, третий — тысячные и т. д.

Примеры. $\frac{27}{100} = 0{,}27$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$; $\frac{578}{100000} = 0{,}00578$;

$3\frac{13}{1000} = 3{,}013$.

При чтении десятичной дроби сначала читают целое число и определяют разряд последнего справа десятичного знака. Затем читают всю дробную часть, называя наименование последнего разряда. Например, 2,381 читают так: две целых, триста восемьдесят одна тысячная. 0,90007 читается, как ноль целых, девяносто тысяч семь стотысячных.

Благодаря поместному принципу записи десятичные дроби имеют большое преимущество над обыкновенными: при сравнении десятичных дробей и выполнении действий над ними нет необходимости приводить их к общему знаменателю. Поэтому на практике чаще пользуются десятичными дробями, чем обыкновенными.

2. Превращение десятичной дроби в обыкновенную. Чтобы преобразовать десятичную дробь в обыкновенную, ее записывают со знаменателем и, если возможно, сокращают:

Примеры. $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$; $1{,}0125 = 1\frac{125}{10000} = 1\frac{1}{80}$.

3. Превращение обыкновенной дроби в десятичную. Существует несколько способов превращения обыкновенной дроби в десятичную.

Первый способ. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель разделить на знаменатель.

Примеры. $\frac{7}{25} = 7 : 25 = 0{,}28$; $\frac{3}{40} = 3 : 40 = 0{,}075$.

Второй способ. Чтобы превратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно помножить числитель и знаменатель данной дроби на такое число, чтобы в знаменателе получилась единица с нулями (если это возможно).

Пример. $\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$.

Однако следует иметь в виду, что не всякую обыкновенную дробь можно обратить в десятичную (конечную). *В виде конечной десятичной дроби можно представить все те и только те обыкновенные дроби, которые после сокращения в знаменателе не содержат никаких простых множителей, кроме* 2 *и* 5. Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби содержит хотя бы один простой мно-

житель, отличный от 2 и 5, то при обращении ее в десятичную получается бесконечная десятичная дробь (см. стр. 102).

4. Основное свойство десятичной дроби. *Величина десятичной дроби не изменится, если к ней справа дописать несколько нулей.* Например, $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300$ и т. д. Это свойство является следствием основного свойства обыкновенных дробей: $0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$ и т. д.

На основании этого свойства выполняется *раздробление и сокращение десятичных дробей.* Чтобы выразить десятичную дробь в меньших десятичных частях, т. е. выполнить раздробление, достаточно написать соответствующее число нулей после последнего ее разряда.

Пример. $2{,}31 = 2{,}310 = 2{,}3100 = 2{,}31000$ и т. д.

В других случаях приходится решать обратную задачу: десятичную дробь, имеющую в конце хотя бы один нуль, выражать в более крупных десятичных частях (сокращение). Для этого достаточно зачеркнуть (отбросить) эти нули *.

Примеры. $5{,}750 = 5{,}75$; $12{,}700 = 12{,}7$; $23{,}3000 = 23{,}3$.

5. Сравнение десятичных дробей по величине. Чтобы выяснить, какая из двух десятичных дробей больше, надо сравнить их целые части, десятые, сотые и т. д. При равенстве целых частей больше та дробь, у которой десятых частей больше; при равенстве целых и десятичных — та больше, у которой больше сотых, и т. д.

Пример. Из трех дробей 2,432; 2,41 и 2,4098 наибольшая первая, так как в ней сотых наибольше, а целые и десятые во всех дробях одинаковы.

§ 20. Действия над десятичными дробями.

1. Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. В десятичной дроби так же, как и в целом числе, значение цифры увеличивается в 10 раз при переходе на одно место справа налево и, наоборот, уменьшается в 10 раз при переходе на одно место слева направо. На основании этого можно быстро выполнять умножение и деление на 10, 100 и т. д.

Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д. надо перенести запятую соответственно на один, два, три и т. д. знака вправо. Если при этом нехватает знаков у числа, то приписывают нули.

---

* В случае приближенных чисел нули в последних разрядах справа в десятичной дроби отбрасывать нельзя, так как они характеризуют, с какой точностью задана десятичная дробь (см. стр. 109).

Пример. $15{,}45 \cdot 10 = 154{,}5$; $32{,}3 \cdot 100 = 3230$.

Чтобы разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., надо перенести запятую соответственно на один, два, три и т. д. знака влево. Если для перенесения запятой нехватает знаков, их число дополняют соответствующим числом нулей слева.

Примеры. $184{,}35 : 100 = 1{,}8435$; $3{,}5 : 100 = 0{,}035$.

2. Сложение и вычитание десятичных дробей. Десятичные дроби складывают и вычитают почти так же, как складывают и вычитают натуральные числа.

Примеры.

$$\begin{array}{r} 5{,}065 \\ +\ 7{,}83 \\ \hline 12{,}895 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}29 \\ -\ 4{,}75 \\ \hline 11{,}54 \end{array}$$

3. Умножение десятичных дробей. *Чтобы перемножить две десятичные дроби, достаточно, не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа и в произведении отделить запятой справа столько десятичных знаков, сколько их было во множимом и множителе вместе.*

Пример 1. $2{,}064 \cdot 0{,}05$.

Перемножаем целые числа $2064 \cdot 5 = 10320$. В первом сомножителе было три знака после запятой, во втором — два. В произведении число десятичных знаков должно быть пять. Отделяем их справа и получаем 0,10320. Нуль, стоящий в конце, можно отбросить: $2{,}064 \cdot 0{,}05 = 0{,}1032$.

Пример 2. $1{,}125 \cdot 0{,}08$; $1125 \cdot 8 = 9000$.

Число знаков после запятой должно быть $3 + 2 = 5$. Приписываем к 9000 нули слева (009000) и отделяем справа пять знаков. Получаем $1{,}125 \cdot 0{,}08 = 0{,}09000 = 0{,}09$.

4. Деление десятичных дробей. Рассматривается два случая деления десятичных дробей без остатка: 1) деление десятичной дроби на целое число; 2) деление числа (целого или дробного) на десятичную дробь.

Деление десятичной дроби на целое число выполняется так же, как и деление целых чисел; получаемые остатки раздробляют последовательно в меньшие десятичные части и продолжают деление до тех пор, пока в остатке будет нуль.

Примеры.

$$\begin{array}{r|l} 2{,}368 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}592 \\ 36 & \\ 36 & \\ \hline 8 & \\ 8 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 66{,}0242 & 22 \\ \hline 66 & 3{,}0011 \\ 24 & \\ 22 & \\ \hline 22 & \\ 22 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Деление числа (целого или дробного) *на десятичную дробь* во всех случаях приводят к делению на целое число. Для этого увеличивают делитель в 10, 100, 1000 и т. д. раз, а чтобы частное не изменилось, в то же число раз увеличивают и делимое, после чего делят на целое число (как в первом случае).

Пример. 47,04 : 0,0084 = 5600;

$$\begin{array}{r|l} 470400 & 84 \\ \underline{-\,420} & \overline{5600} \\ 504 & \\ \underline{-\,504} & \\ 0 & \end{array}$$

Во всех рассмотренных выше примерах деление доводилось до конца, т. е. получалось точное частное. Однако в большинстве случаев точное частное в виде десятичной дроби не может быть получено, как бы далеко ни продолжалось деление.

Пример.
$$\begin{array}{r|l} 0{,}5 & 6 \\ \underline{48} & \overline{0{,}08333\ldots} \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 20 & \text{и т. д.} \end{array}$$

Здесь все время повторяется один и тот же остаток 2, следовательно, процесс деления можно продолжать без конца. Частное в данном случае можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби 0,08333... (см. стр. 102).

5. **Примеры на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями.** Рассмотрим сначала пример на все действия с десятичными дробями.

Пример 1. Вычислить:

$$\frac{2{,}7 \cdot 12{,}4 \cdot 45}{0{,}9 \cdot 0{,}31}.$$

Здесь пользуются приведением делимого и делителя к целому числу с учетом того, что частное при этом не изменяется. Тогда имеем:

$$\frac{2{,}7 \cdot 12{,}4 \cdot 45}{0{,}9 \cdot 0{,}31} = \frac{27 \cdot 124 \cdot 450}{9 \cdot 31} = 3 \cdot 4 \cdot 450 = 5400.$$

При решении примеров на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями часть действий можно выполнять в десятичных дробях, а часть — в обыкновенных. Надо иметь в виду, что не всегда обыкновенная дробь может быть превращена в конечную десятичную дробь. Поэтому записывать десятичной дробью можно только тогда, когда проверено, что такое преобразование возможно.

Пример 2. Вычислить:

$$\left(0{,}5 : 1{,}25 + 3\frac{1}{2} \cdot 1{,}03 - 1{,}005\right) : \left(2\frac{1}{16} - 1\frac{23}{24}\right).$$

а) $0{,}5 : 1{,}25 = 50 : 125 = 0{,}4$; б) $3\frac{1}{2} \cdot 1{,}03 = 3{,}5 \cdot 1{,}03 = 3{,}605$;

в) $0{,}4 + 3{,}605 = 4{,}005$; г) $4{,}005 - 1{,}005 = 3$;

д) $2\frac{1}{16} - 1\frac{23}{24} = 2\frac{6}{96} - 1\frac{92}{96} = 1\frac{102}{96} - 1\frac{92}{96} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$;

е) $3 : \frac{5}{48} = \frac{3 \cdot 48}{5} = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}$.

§ 21. Периодические десятичные дроби

1. Определение периодической десятичной дроби. Бесконечные ые десятичные дроби, в которых одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называются *периодическими* десятичными дробями. Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* этой дроби.

Периодические дроби бывают чистые и смешанные. *Чистой периодической дробью* называется такая, у которой период начинается сразу после запятой, например 2,363636...; *смешанной* — такая, у которой между запятой и первым периодом есть одна или несколько цифр неповторяющихся, например 0,5232232... Периодические дроби сокращенно пишут так: вместо 2,3636... пишут 2,(36): вместо 0,08333... пишут 0,08(3); вместо 0,5232232... пишут 0,5(232), т. е. заключают в скобки период.

Если обыкновенная несократимая дробь обращается в бесконечную десятичную дробь, то последняя будет обязательно периодической, причем, *если у знаменателя дроби отсутствуют множители* 2 *и* 5, *она будет чистой периодической, если же знаменатель содержит множителем* 2 *или* 5, *она будет смешанной.*

Примеры. Дробь $\frac{5}{27}$ превращается в чистую периодическую десятичную, так как 27 не делится ни на 2, ни на 5. Дробь $\frac{7}{12}$ пре-

вращается в смешанную периодическую, так как 12 делится на 2. Действительно

$$\begin{array}{r|l} 5 & 27 \\ \hline -\,50 & 0{,}185185\ldots = 0{,}(185) \\ 27 & \\ \hline -\,230 & \\ 216 & \\ \hline -\,140 & \\ 135 & \\ \hline 50 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 12 \\ \hline -\,70 & 0{,}5833\ldots = 0{,}58(33). \\ 60 & \\ \hline -\,100 & \\ 96 & \\ \hline -\,40 & \\ 36 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

Известно правило, позволяющее сразу определить, сколько будет цифр в периоде и сколько до периода, если превращать обыкновенную несократимую дробь в бесконечную десятичную.

Если $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot c$, *и* c *взаимно простое с 10, то несократимая дробь* $\frac{a}{b}$ *превращается в такую бесконечную десятичную, в которой число цифр от запятой до первого периода равно большему из показателей* α *и* β, *а число цифр в периоде равно числу цифр в наименьшем из чисел* 9, 99, 999, 9999 *и т. д., которое делится на* c.

Пример. Сколько цифр до периода и сколько в периоде имеет бесконечная десятичная дробь, равная $\frac{301}{440}$?

Решение. $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$.

Больший показатель степени здесь равен 3. Следовательно, до периода должно быть 3 цифры. Число 99 делится на 11 (а 9 не делится), следовательно, в периоде должно быть 2 цифры.

Проверка.

$$\begin{array}{r|l} 301 & 440 \\ \hline -\,3010 & 0{,}6840909\ldots = 0{,}684\ (09) \\ 2640 & \\ \hline -\,3700 & \\ 3520 & \\ \hline -\,1800 & \\ 1760 & \\ \hline -\,4000 & \\ 3960 & \\ \hline 4000 & \end{array}$$

2. Обращение периодической дроби в обыкновенную. *Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно записать числителем ее период, а знаменателем — число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде.*

Примеры. $0,(7)=\frac{7}{9}$; $2,(05)=2\frac{5}{99}$; $0,(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111}$.

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде и со столькими нулями на конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Пример 1. $0,3(52)=\frac{352-3}{990}=\frac{349}{990}$;

Пример 2. $5,7(8)=5\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90}$.

10. **Историческая справка о десятичных дробях.** Десятичные дроби были введены значительно позже, чем обыкновенные. Впервые теорию десятичных дробей разработал среднеазиатский математик и астроном ал-Каши в начале XV в. В Европе десятичные дроби были вторично открыты голландским математиком Симоном Стевином в 1585 г. Современное обозначение десятичных дробей — введение запятой для отделения целой части числа от дробной было предложено немецким астрономом И. Кеплером (1571—1630). В Англии и США вместо запятой до сих пор употребляется точка — знак, предложенный изобретателем логарифмов Джоном Непером в 1616 г. В России десятичные дроби впервые были изложены в «Арифметике» Магницкого.

§ 22. Проценты

1. **Понятие о проценте.** *Процентом* какого-либо числа называется сотая часть этого числа. Например, вместо того, чтобы сказать «54 сотых всех жителей нашей страны составляют женщины», можно сказать «54 процента всех жителей нашей страны составляют женщины». Вместо слова «процент» пишут также значок %, например 35% — значит 35 процентов.

Слово «процент» происходит от латинских слов *pro centum*, что означают «с сотни». Раньше процентами называли деньги, которые должник должен был платить дополнительно за каждую занятую им сотню рублей.

Так как процент есть сотая часть, то отсюда следует, что процент есть дробь со знаменателем 100. Поэтому дробь 0,49, или $\frac{49}{100}$, можно прочитать как 49 процентов и записать без знаменателя в виде 49%. Вообще, определив, сколько в данной десятичной дроби сотых частей, ее легко записать в процентах. Для этого пользуются

правилом: чтобы записать десятичную дробь в процентах, надо перенести в этой дроби запятую на два знака вправо.

Примеры. $0{,}33 = 33\%$; $1{,}25 = 125\%$;
$0{,}002 = 0{,}2\%$; $21 = 2100\%$.

И наоборот:

$7\% = 0{,}07$; $24{,}5\% = 0{,}245$;
$0{,}1\% = 0{,}001$; $200\% = 2$.

Иногда употребляют понятие *промилле*. Промилле числа называют тысячную долю этого числа. Слово промилле происходит от латинского *pro mille* — с тысячи. Обозначают промилле знаком $^0/_{00}$.

Пример. $0{,}002 = 0{,}2\% = 2^0/_{00}$.

В тысячных долях выражают концентрации растворов, отношения веса чистого золота, серебра, платины к общему весу сплава и др. Однако в последнем случае вместо промилле употребляют слово *проба*. Пробой называют число граммов драгоценного металла в 1000 *г* сплава. Например, золотом 920-й пробы называют сплав, в 1000 *г* которого содержится 920 *г* чистого золота.

§ 23. Основные типы задач на проценты

1. Нахождение процентов данного числа.

Задача. Бригада трактористов по плану должна израсходовать 9 *т* горючего. Трактористы взяли соцобязательство сэкономить 20% горючего. Определить экономию горючего в тоннах.

Если в этой задаче вместо 20% написать равное ему число 0,2, получим задачу на нахождение дроби числа. А такие задачи решают умножением (см. стр. 95). Отсюда вытекает способ решения:

$$20\% = 0{,}2; \quad 9 \cdot 0{,}2 = 1{,}8 \ (т).$$

Вычисления можно записать и так:

$$\frac{9 \cdot 20}{100} = 1{,}8 \ (т).$$

Вообще, $p\%$ числа a равны $\frac{a \cdot p}{100}$.

Чтобы найти несколько процентов данного числа, достаточно данное число разделить на 100 *и умножить результат на число процентов.*

Задача. Рабочий в 1963 г. получал в месяц 90 руб., а в 1964 г. стал получать на 30% больше. Сколько получал он в 1964 г.?

Решение (первый способ).

1) На сколько рублей больше стал получать рабочий?

$$\frac{90 \cdot 30}{100} = 27 \text{ (руб)}.$$

2) Какова была месячная зарплата рабочего в 1964 г.?

$$90 + 27 = 117 \text{ (руб)}.$$

Второй способ.

1) Сколько процентов прежнего заработка стал получать рабочий в 1964 г.?

$$100\% + 30\% = 130\%.$$

2) Какова была месячная зарплата рабочего в 1964 г.?

$$\frac{90 \cdot 130}{100} = 117 \text{ (руб)}.$$

2. Нахождение числа по данной величине его процентов.

Задача. В колхозе посеяли кукурузу на площади 280 *га*, что составляет 14% всей посевной площади. Определить посевную площадь колхоза.

Если в этой задаче вместо 14% написать 0,14 $\left(\text{или } \frac{14}{100}\right)$, то получим задачу на нахождение числа по известной величине его дроби (стр. 96). А такие задачи решают делением.

Решение. $14\% = 0.14$; $280 : 0{,}14 = 2000$ (*га*).

Можно это решение оформить и так:

$$280 : \frac{14}{100} = \frac{280 \cdot 100}{14} = 2000 \text{ (га)}.$$

Вообще, если $p\%$ какого-то числа составляет a, то все число равно $\frac{a \cdot 100}{p}$.

Чтобы найти число по данной величине нескольких процентов его, достаточно эту величину разделить на число процентов и результат умножить на 100.

Задача. В марте завод выплавил 125,4 *т* металла, перевыполнив план на 4,5%. Сколько тонн металла завод должен был выплавить в марте по плану?

Решение.

1) На сколько процентов завод выполнил план в марте?

$$100\% + 4{,}5\% = 104{,}5\%.$$

2) Сколько тонн металла завод должен был выплавить?

$$\frac{125{,}4 \cdot 100}{104{,}5} = 120 \text{ (т)}.$$

3. Нахождение процентного отношения двух чисел.

Задача. Нужно вспахать 300 *га* земли. В первый день вспахали 120 *га*. Сколько процентов к заданию вспахали в первый день?

Решение. **Первый способ.** 300 *га* составляет 100%, значит, на 1% приходится 3 *га*. Определив, сколько раз 3 *га*, составляющие 1%, содержатся в 120 *га*, мы узнаем сколько процентов к заданию вспахали земли в первый день

$$120 : 3 = 40(\%).$$

Второй способ. Определив, какую часть земли вспахали в первый день, выразим эту дробь в процентах.

Записываем вычисление:

$$\frac{120}{300} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%.$$

Чтобы вычислить процентное отношение числа a к числу b, нужно найти отношение a к b и умножить его на 100.

Задача. Автомобиль на каждые 100 *км* пути летом расходует 8 *л* бензина, а зимой 8,8 *л*. На сколько процентов зимняя норма больше летней?

Решение. Зимой на каждые 100 *км* автомобиль расходует на $8{,}8 - 8 = 0{,}8$ (*л*) больше, чем летом. Эти 0,8 *л* по отношению к 8 *л* составляют $0{,}8 : 8 = 0{,}1 = 10\%$.

Ответ. На 10%.

Примечание. Иногда учащиеся считают, что в данном случае летняя норма расхода бензина меньше зимней также на 10%. Это неверно. В первом случае, когда мы сравниваем расход бензина с летней нормой, мы принимаем за 100% 8 *л*, если же сравнивать с зимней нормой, нужно за 100% принимать 8,8 *л*, и ту же разность 0,8 *л* делить уже не на 8 *л*, а на 8,8 *л*, т. е.

$$0{,}8 : 8{,}8 = 0{,}091 = 9{,}1\%.$$

Как видим, летняя норма меньше зимней не на 10%, а на 9,1%.

4. Таблицы процентных отношений. Задачи на нахождение процентного отношения чисел широко распространены на практике. Для облегчения вычислений и экономии времени составлены таблицы процентных отношений.

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
61	100,00	98,39	96,83	95,31	93,85	92,42	91,04	89,71	88,41	87,14
62		100,00	98,41	96,88	95,39	93,94	92,54	91,18	89,86	88,57
63			100,00	98,44	96,92	95,45	94,03	92,65	91,30	90,00
64				100,00	98,46	96,37	95,52	94,12	92,74	91,43
65					100,00	98,48	97,01	95,59	93,20	92,86
66						100,00	98,51	97,06	95,65	94,29
67							100,00	98,53	97,10	95,71
68								100,00	98,55	97,14
69									100,00	98,57
70										100,00

В приведенной части таблицы можно найти процентные отношения чисел от 61 до 70 к числам от 61 до 70. Найдем, например, чему равно процентное отношение 62 к 64. Во второй строке первого столбца найдем число 62; на пересечении этой строки и столбца с числом 64 найдем процентное отношение 62 к 64. Оно равно 96,88%.

Воспользуемся теперь нашей таблицей для решения такой задачи.

Для отопления дома необходимо заготовить 70 *т* угля. На 1 октября привезено 65 *т*. Сколько процентов топлива заготовлено?

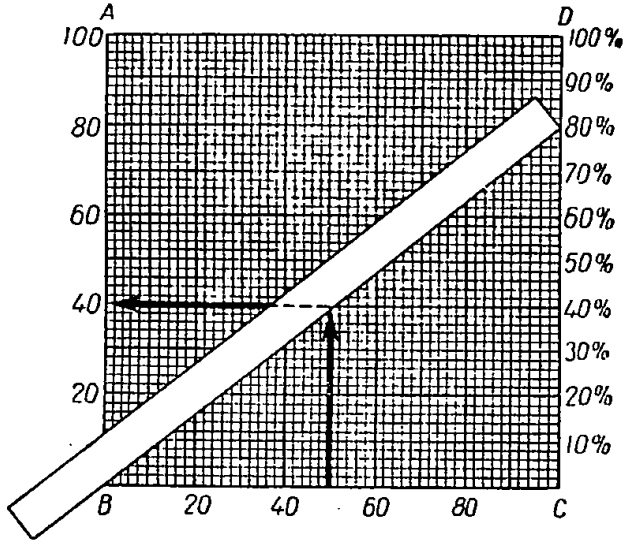


Рис. 7.

Решение задачи состоит в нахождении процентного отношения 65 к 70. Это отношение ищем по таблице, оно равно 92,86%.

5. График для решения задач на проценты. С помощью простого графика (рис. 7) можно решать задачи на проценты. Искомые и данные числа откладывают на отрезках *AB* и *BC*. На графике показано, как при помощи линейки найти 80% от 50, а также, что число 40 составляет 80% от 50 (обратная задача).

§ 24. Приближенные вычисления

1. Числа точные и приближенные. Числа, с которыми мы встречаемся на практике, бывают двух родов. Одни дают истинное значение величины, другие — только приблизительное. Первые называют

точными, вторые — *приближенными*. Чаще всего удобно пользоваться приближенным числом вместо точного, тем более, что во многих случаях точное число вообще найти невозможно.

Так, если говорят, что в классе есть 29 учеников, то число 29 — точное. Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 *км*, то здесь число 960 — приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяженность.

Результат действий с приближенными числами есть тоже приближенное число. Выполняя некоторые действия над точными числами (деление, извлечение корня), можно также получить приближенные числа.

Теория приближенных вычислений позволяет: 1) зная степень точности данных, оценить степень точности результатов; 2) брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной для обеспечения требуемой точности результата; 3) рационализировать процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точность результата.

2. **Округление.** Одним из источников получения приближенных чисел является *округление*. Округляют как приближенные, так и точные числа.

Округлением данного числа до некоторого его разряда называют замену его новым числом, которое получается из данного путем отбрасывания всех его цифр, записанных правее цифры этого разряда, или путем замены их нулями. Эти нули обычно подчеркивают или пишут их меньшими. Для обеспечения наибольшей близости округленного числа к округляемому следует пользоваться такими правилами:

чтобы округлить число до единицы определенного разряда, надо отбросить все цифры, стоящие после цифры этого разряда, а в целом числе заменить их нулями. При этом учитывают следующее:

1) если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с *недостатком*);

2) если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с *избытком*).

Покажем это на примерах. Округлить:

а) до десятых 12,34;

б) до сотых 3,2465; 1038,785;

в) до тысячных 3,4335.

г) до тысяч 12 375; 320 729.

Ответы.

а) $12.34 \approx 12{,}3$;

б) $3{,}2465 \approx 3{,}25$; $1038{,}785 \approx 1038{,}79$;

в) $3{,}4335 \approx 3{,}434$.

г) $12\,375 \approx 12\,\underline{000}$; $320\,729 \approx 321\,000$.

Примечание. Еще несколько лет назад в случае отбрасывания одной лишь цифры 5 пользовались *«правилом четной цифры»*: последнюю цифру оставляли без изменения, если она четная, и увеличивали на единицу, если нечетная. Теперь же «правила четной цифры» не придерживаются: если отбрасывают одну цифру 5, то к последней оставленной цифре прибавляют единицу не зависимо от того, четная она или нечетная.

3. Абсолютная и относительная погрешности. Разность между точным числом и его приближенным значением называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа. Например, если точное число 1,214 округлить до десятых, получим приближенное число 1,2. В данном случае абсолютная погрешность приближенного числа 1,2 равна 1,214 — 1,2, т. е. 0,014.

Но в большинстве случаев точное значение рассматриваемой величины неизвестно, а только приближенное. Тогда и абсолютная погрешность неизвестна. В этих случаях указывают границу, которую она не превышает. Это число называют *граничной абсолютной погрешностью*. Говорят, что точное значение числа равно его приближенному значению с погрешностью меньшей, чем граничная погрешность. Например, число 23,71 есть приближенное значение числа 23,7125 с точностью до 0,01, так как абсолютная погрешность приближения равна 0,0025 и меньше 0,01. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,01 *.

Граничную абсолютную погрешность приближенного числа a обозначают символом Δa. Запись

$$x \approx a\,(\pm\Delta a)$$

следует понимать так: точное значение величины x находится в промежутке между числами $a - \Delta a$ и $a + \Delta a$, которые называют соответственно *нижней* и *верхней границей* x и обозначают НГx и ВГx.

Например, если $x \approx 2{,}3\,(\pm 0{,}1)$, то $2{,}2 < x < 2{,}4$.

Наоборот, если $7{,}3 < x < 7{,}4$, то $x \approx 7{,}35\ (\pm 0{,}05)$. Абсолютная или граничная абсолютная погрешность не характеризует качество выполненного измерения. Одна и та же абсолютная погрешность может считаться значительной и незначительной в зависимости от числа, которым выражается измеряемая величина. Например, если измеряем расстояние между двумя городами с точностью до одного километра, то такая точность вполне достаточна для этого измерения, в то же время при измерении расстояния между двумя домами одной улицы такая точность будет недопустимой. Следовательно, точность приближенного значения величины зависит не только от величины

* Абсолютная погрешность бывает и положительной и отрицательной. Например, 1,68 ≈ 1,7. Абсолютная погрешность равна 1,68 — 1,7 ≈ —0,02 (см. стр. 153). Граничная абсолютная погрешность всегда положительна.

абсолютной погрешности, но и от значения измеряемой величины. Поэтому мерой точности служит относительная погрешность.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к величине приближенного числа. Отношение граничной абсолютной погрешности к приближенному числу называют *граничной относительной погрешностью*; обозначают ее так: $\frac{\Delta a}{a}$. Относительную и граничную относительную погрешности принято выражать в процентах. Например, если измерения показали, что расстояние x между двумя пунктами больше 12,3 *км*, но меньше 12,7 *км*, то за приближенное значение его принимают среднее арифметическое этих двух чисел, т. е. их полусумму, тогда граничная абсолютная погрешность равна полуразности этих чисел. В данном случае $x \approx 12{,}5\,(\pm 0{,}2)$. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,2 *км*, а граничная относительная

$$\frac{0{,}2}{12{,}5} = 0{,}016 = 1{,}6\%.$$

§ 25. Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр

1. Предварительные замечания. Различают приближенные вычисления со строгим учетом погрешностей и без строгого учета. В менее ответственных вычислениях с приближенными числами пользуются вторым способом, основанным на так называемых *правилах подсчета цифр.*

В этих правилах используются понятия десятичных знаков, значащих цифр, точных и сомнительных цифр. Напомним, что *десятичными знаками* числа называют все его цифры, стоящие правее запятой (см. стр. 98). Например, числа 3,5 и 3,05 имеют соответственно один и два десятичных знака.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, начиная с первой слева отличной от нуля, кроме нулей, стоящих в конце записи числа на месте отброшенных при округлении цифр (как уже отмечалось, эти нули обычно подчеркивают или пишут меньшими).

Примеры. В числе 3,5 — две значащих цифры, в числе 0,0307 — три значащих цифры. В числе 35 000, полученном в результате округления до тысяч, две значащих цифры.

Если граница абсолютной погрешности приближенного числа равна половине единицы разряда последней его цифры, то все цифры этого числа называют *точными*. Если же эта граница больше половины единицы разряда последней цифры числа, то последняя цифра такого числа называется *сомнительной*.

Примеры. В числе 2,06 ($\pm$0,005) цифры 2, 0 точные, а 6 — сомнительная. В числе 2,06 ($\pm$0,01) цифры 2 и 0 точные, а 6 — сомнительная. В числе 35 000, полученном в результате округления до тысяч, цифры 3 и 5 точные, а все три нуля — сомнительные.

Правила подсчета цифр тесно связаны *с принципом А. Н. Крылова* (1863—1945): *Приближенное число следует писать так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и при том не более как на одну единицу.* Например, если приближенное число записано так: $x \approx 3{,}52$, то это значит, что оно дано с точностью до сотых, т. е. $x \approx 3{,}52(\pm 0{,}01)$. Если же известно, что $x \approx 3{,}72\,(\pm 0{,}02)$, то, согласно принципу А. Н. Крылова, его надо писать так: $x \approx 3{,}7$.

Вычисления с приближенными числами, записанными таким способом, выполняют как и над точными числами, но, придерживаясь таких правил.

2. **Правила подсчета цифр.** I. *При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.*

Пример. Найти сумму приближенных чисел 127, 42, 67, 3, 0,12 и 3,03.

Решение.

$$\begin{array}{r} 127{,}42 \\ 67{,}3 \\ +\ 0{,}12 \\ 3{,}03 \\ \hline 197{,}87 \end{array} \approx 197{,}9.$$

Пример. Найти разность чисел: 418,7 — 39,832

Решение.

$$\begin{array}{r} 418{,}7 \\ -\ 39{,}83 \\ \hline 378{,}87 \end{array} \approx 378{,}9.$$

II. *При умножении и делении приближенных чисел в произведении надо сохранить столько значащих цифр, сколько их есть в данном числе с наименьшим количеством значащих цифр.*

Пример. Умножить приближенные числа 3,4 и 12,32.

Решение.

$$\begin{array}{r} 12{,}32 \\ \times\ 3{,}4 \\ \hline 4928 \\ +\ 3696 \\ \hline 41{,}888 \end{array} \approx 42.$$

Задача. Площадь прямоугольной грядки приближенно равна 7,6 *кв. м*, ширина — 2,38 *м*. Чему равна ее длина?

Решение. Длина грядки равна частному от деления 7,6 на 2,38.

Действие деления выполняют так:

$$\begin{array}{r|l} 7,60 & 2,38 \\ \cline{2-2} -\ 7,14 & 3,19 \approx 3,2\ (м). \\ \cline{1-1} \quad 460 & \\ -\ 238 & \\ \cline{1-1} \quad 222 & \end{array}$$

Последнюю цифру частного 9 можно было и не писать, а, получив в частном две значащие цифры, заметив, что остаток больший половины делителя, округлить частное с избытком.

III. *При возведении приближенных чисел в квадрат и куб в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их в основании* *.

Примеры. $2{,}3^2 = 5{,}29 \approx 5{,}3$;
$0{,}8^3 = 0{,}512 \approx 0{,}5$.

IV. В промежуточных результатах следует брать одной цифрой больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

V. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях первой ступени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступеней), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

VI. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, которое дает согласно правилам I—IV $k+1$ цифру в результате.

3. **Применение правил.** Применение вычислений способом подсчета цифр рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \dfrac{(a-b)\,c}{a+b}$, если $a \approx 9{,}31$, $b \approx 3{,}1$, $c \approx 2{,}33$.

Решение. $a - b = 9{,}31 - 3{,}1 = 6{,}21$;
$(a-b)\,c = 6{,}21 \cdot 2{,}33 \approx 14{,}5$;
$a + b = 9{,}31 + 3{,}1 = 12{,}4$;
$x = 14{,}5 : 12{,}4 \approx 1{,}2$.

Ответ. $x \approx 1{,}2$.

---

* Аналогичные правила для извлечения корней и логарифмирования см на стр. 182.

Примечание. Сформулированные выше правила подсчета цифр имеют вероятностный смысл: они наиболее вероятны, хотя существуют примеры, не удовлетворяющие этим правилам. Поэтому вычисления способом подсчета цифр — самый грубый способ оценки погрешности результатов действий. Однако он очень прост и удобен, а точность таких вычислений вполне достаточна для большинства технических расчетов. Поэтому этот способ широко распространен в вычислительной практике.

В более ответственных вычислениях пользуются способом границ или способом граничных погрешностей.

§ 26. Приближенные вычисления по способу границ

Наилучшим в смысле строгости из известных способов приближенных вычислений является *способ границ*. Пользуясь этим способом, по известным нижним и верхним границам данных чисел, находят отдельно нижнюю и верхнюю границы результата.

Пусть, например, надо сложить два числа:

$$x \approx 3{,}2\,(\pm 0{,}05) \text{ и } y \approx 7{,}9\,(\pm 0{,}05).$$

Имеем: $3{,}15 < x < 3{,}25$,

$7{,}85 < y < 7{,}95$,

откуда $11{,}00 < x + y < 11{,}20$.

Итак, $x + y \approx 11{,}1\,(\pm 0{,}1)$.

Вообще, нижняя граница суммы приближенных чисел равна сумме нижних границ слагаемых, а верхняя — сумме верхних границ слагаемых. Символически это можно записать так:

$$\text{НГ}\,(x+y) = \text{НГ}x + \text{НГ}y; \quad \text{ВГ}\,(x+y) = \text{ВГ}x + \text{ВГ}y.$$

Аналогичные правила справедливы для умножения:

$$\text{НГ}\,(xy) = \text{НГ}x \cdot \text{НГ}y; \quad \text{ВГ}\,(xy) = \text{ВГ}x \cdot \text{ВГ}y.$$

Для обратных действий — вычитания и деления — соответствующие правила имеют такой вид:

$$\text{НГ}\,(x-y) = \text{НГ}x - \text{ВГ}y; \quad \text{ВГ}\,(x-y) = \text{ВГ}x - \text{НГ}y.$$

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}; \qquad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y}.$$

Из определения НГ и ВГ вытекают также следующие правила:

1) округлять НГ можно только по недостатку, а ВГ — по избытку;

2) чем меньше разность $\text{ВГ}x - \text{НГ}x$, тем точнее определяется x;

3) в качестве приближенного значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел $\text{НГ}x$ и $\text{ВГ}x$ или число, близкое к нему.

Применение способа границ при вычислениях рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение

$$x = \frac{(a - b)\,c}{a + b},$$

если $a \approx 9{,}21\ (\pm 0{,}01)$; $b \approx 3{,}05\ (\pm 0{,}02)$, $c \approx 2{,}33\ (\pm 0{,}01)$.

Решение. Определяем НГ и ВГ каждого из чисел a, b, c и, выполнив над ними соответствующие действия, находим НГ и ВГ числа x.

Запись удобно оформить в виде такой таблицы.

Компоненты	НГ	ВГ
a	9,20	9,22
b	3,03	3,07
c	2,32	2,34
$a - b$	6,13	6,19
$(a - b)\,c$	14.22	14,49
$a + b$	12,23	12,29
x	1,15	1,19

$$1{,}15 < x < 1{,}19$$

$$\begin{array}{rr} +\ 1{,}15 & -\ 1{,}19 \\ \underline{\ \ 1{,}19} & \underline{\ \ 1{,}15} \\ 2{,}34 & 0{,}04 \end{array}$$

$$2{,}34 : 2 = 1{,}17; \quad 0{,}04 : 2 = 0{,}02$$

$$x \approx 1{,}17\ (\pm 0{,}02).$$

Литература. Энциклопедия элементарной математики, I, М, 1951.
В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, М., 1954.
А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, Изд-во АН СССР, Л., 1933.

ВЕЛИЧИНЫ И ПРОПОРЦИИ

§ 27. Измерение величин

1. Величины и их измерения. Дать строгое определение понятию «величина» нельзя. Это одно из основных (неопределяемых) понятий, смысл которого раскрывают при помощи различных описаний. В старых книгах величинами называли все то, что способно увеличиваться или уменьшаться. Однако это нельзя считать строгим определением, так как говорят, например, об увеличении аппетита, прав, обязанностей и других понятий, которых не принято считать величинами.

Примерами величин есть: длина, площадь, объем, вес, скорость, время и др.

Характерное свойство величины состоит в том, что наряду с другими свойствами она имеет и числовую характеристику. Поэтому говорят о том или ином *числовом значении величины*. Величины можно измерять.

Измерить какую-нибудь величину — значит сравнить ее значение со значением другой величины такого же рода, принятой за единицу.

В каждом государстве установлены определенные единицы для измерения основных величин. Единицы измерения, вошедшие в употребление, называются *мерами*. Так, сейчас у нас приняты: за единицу длины метр, за единицу веса — грамм, за единицу времени — секунда и т. д.*.

Однако не всегда у нас пользовались такими мерами, а в некоторых странах и теперь приняты другие меры.

2. Старые русские меры. Некоторые старые русские меры и соотношения между ними.

Меры длины

Миля	содержит	7 верст ≈ 7,4676 *км*
Верста	»	500 саженей ≈ 1,0668 *км*
Сажень	»	3 аршина ≈ 2,1336 *м*
Аршин	»	16 вершков ≈ 0,7112 *м*
Сажень	»	7 футов ≈ 213,36 *см*
Фут	»	12 дюймов ≈ 30,48 *см*
Дюйм	»	10 линий ≈ 2,54 *см*

Меры веса

Пуд	содержит	40 фунтов (1 пуд ≈ 16,4 *кг*)
Фунт	»	32 лота
Лот	»	3 золотника
Золотник	»	96 долей

3. Английские меры.

Меры длины

1 мил	содержит	0,001 дюйма
1 ладонь	»	4 дюйма
1 пядь	»	9 дюймов
1 фут	»	12 дюймов
1 ярд	»	3 фута
1 пол	»	5,5 ярдов
1 фурлонг	»	220 ярдов
1 англ. миля	»	8 фурлонгов
1 лига	»	3 мили

* Для каждого года величин выбирают несколько единиц: одни более крупные (кратные), другие более мелкие (дольные).

Примечание. Основной единицей длины в английских системах мер является ярд. Британский ярд равен 0,91439841 *м*. В США ярд равен $\frac{3600}{3937}$ *м*.

Мера веса

1 унция	содержит	16 драхм
1 фунт	»	16 унций
1 стоун	»	14 фунтов
1 британская четверть	содержит	2 стоуна
1 четверть (в США)	»	25 фунтов
1 центнер	»	4 четверти
1 тонна	»	20 центнеров
1 длинная тонна (британская мера)	»	2240 фунтов
1 короткая тонна (в США)	»	2000 фунтов

Примечание. Основной единицей веса в Англии и США является фунт. Он равен 0,453559243 килограмма. Перечень других английских мер дан в книге «Англо-русский словарь математических терминов», М., 1962.

§ 28. Метрическая система мер

В СССР с 1918 г. введена Метрическая система мер. Производные меры получаются из основных посредством увеличения или уменьшения их в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Некоторые важнейшие меры Метрической системы:

Меры длины

Основная единица — метр (*м*)

Более мелкие единицы	*Более крупные единицы*
Дециметр (*дм*) — 0,1 *м*	Декаметр (*дкм*) — 10 *м*
Сантиметр (*см*) — 0,01 *м*	Гектометр (*гм*) — 100 *м*
Миллиметр (*мм*) — 0,001 *м*	Километр (*км*) — 1000 *м*
Микрон или микрометр (μ) — 0,000001 *м*	Мириаметр (*мм*) — 10000 *м*
Миллимикрон ($m\mu$) — 0,000000001 *м*	Мегаметр — 1000000 *м*

Меры площади

Основная единица — **квадратный метр** (*кв. м*, или $м^2$)

Более мелкие единицы

Квадратный дециметр (*кв. дм*) = = 0,01 *кв. м*

Квадратный сантиметр (*кв. см*) = = 0,0001 *кв. м*

Квадратный миллиметр (*кв. мм*) = = 0,000001 *кв. м*

Более крупные единицы

Квадратный декаметр или ар (*а*) = 100 *кв. м*

Квадратный гектометр или гектар (*га*) = 10 000 *кв. м*

Квадратный километр (*кв. км*) = = 1 000 000 *кв. м*

Меры объема

а) Газообразных и твердых тел

Основная единица — **кубический метр**, или стер (*куб. м*, или $м^3$)

Более мелкие единицы

Кубический дециметр (*куб. дм*) = 0,001 *куб. м*

Кубический сантиметр (*куб. см*) = = 0,000001 *куб. м*

Кубический миллиметр (*куб. мм*) = = 0,000000001 *куб. м*

Более крупные единицы

Кубический километр (*куб. км*) = = 1 000 000 000 *куб. м*

б) Жидкостей и сыпучих тел

Основная единица — **литр** (*л*) — объем 1 *куб. дм*. Точнее 1 *л* = = 1,000028 *куб. дм*.

Более мелкие единицы

Децилитр (*дл*) = 0,1 *л*

Сантилитр (*сл*) = 0,01 *л*

Миллилитр (*мл*) = 0,001 *л*

Микролитр (*мкл*) = 0,000001 *л*

Более крупные единицы

Декалитр (*дкл*) = 10 *л*

Гектолитр (*гл*) = 100 *л*

Килолитр (*кл*) = 1000 *л*

Меры веса

Основная единица — **грамм** (*г*) вес 1 *куб. см* чистой дистиллированной воды при 4° С и атмосферном давлении 760 *мм рт. ст.*

Более мелкие единицы

Дециграмм (*дг*) = 0,1 *г*

Сантиграмм (*сг*) = 0,01 *г*

Миллиграмм (*мг*) = 0,001 *г*

Микрограмм = 0,000001 *г*

Карат (*к*) = 0,2 *г*

Более крупные единицы

Декаграмм (*дкг*) = 10 *г*

Гектограмм = 100 *г*

Килограмм (*кг*) = 1000 *г*

Центнер (*ц*) = 100 *кг*

Тонна (*т*) = 1000 *кг*

§ 29. Система СИ

В октябре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам, на которой присутствовали представители 32 стран (в том числе СССР, Чехословакии, Франции, Великобритании, США и др.), приняла Международную систему единиц SI (СИ — система интернациональная) в качестве универсальной системы для всех отраслей науки и техники.

В сентябре 1961 г. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР утвердил новый государственный стандарт «Международная система единиц» (ГОСТ 9867-61) для предпочтительного его применения с 1 января 1963 г. во всех областях науки, техники и народного хозяйства.

Международная система единиц состоит из шести основных единиц: метра *(м)* — для длины, килограмма *(кг)* — для массы, секунды *(сек)* — для времени, градуса Кельвина (°К) — для термодинамической температуры, ампера *(а)* — для силы тока и свечи *(св)* — для силы света; двух дополнительных единиц: радиана *(рад)* — для плоского угла и стерадиана *(стер)* — для телесного угла и 27 важнейших производных единиц: площади — квадратный метр ($м^2$), объема — кубический метр ($м^3$), линейной скорости — метр на секунду *(м/сек)*, угловой скорости — радиан на секунду *(рад/сек)* и др. *.

Большинство определений основных единиц в системе СИ является новыми. Например: «Метр — длина, равная 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2P_{10}$ и $5d_5$ атома криптона 86»; «Килограмм — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма»; «Секунда — $\frac{1}{31556925,9747}$ часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени».

Необходимость новых определений вызвана тем, что старые определения не обеспечивали надлежащей точности измерений при современном состоянии техники. Новые определения основных единиц более стабильны, чем старые, и дают возможность повысить точность их воспроизведения.

Более крупные (кратные) и более мелкие (дольные) единицы измерения по сравнению с приведенными в системе СИ (как и в метрической системе) следует образовывать путем их умножения на степень числа 10, соответствующую приставке, присоединенной к наименованию основной единицы **:

---

* М. Г. Богуславский и др., Таблицы перевода единиц измерений, Стандартгиз, М., 1963.

** 10^{-1}, 10^{-2}, ... обозначают соответственно $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ... (см. стр. 210).

дека	10 (*дк*)	деци	10^{-1} (*д*)
гекто	10^{2} (*г*)	санти	10^{-2} (*с*)
кило	10^{3} (*к*)	милли	10^{-3} (*м*)
мега	10^{6} (*М*)	микро	10^{-6} (*мк*)
гига	10^{9} (*Г*)	нано	10^{-9} (*н*)
тера	10^{12} (*Т*)	пико	10^{-12} (*п*)

§ 30. Исторические сведения о метрологии

Почти все единицы мер, принятые разными древнейшими народами, связаны с размерами частей человеческого тела. Такое происхождение имеют в частности дюйм (ширина пальца), фут (длина ступни), локоть (длина руки от локтя до конца среднего пальца), сажень (расстояние между концами средних пальцев двух вытянутых в стороны рук). Тысяча двойных шагов в древнем Риме получила название мили (от *milia* — тысяча).

Наиболее разработанной из древнейших метрологий была вавилонская, оказавшая значительное влияние на метрологию иных древних народов. До настоящего времени мы пользуемся единицами измерения времени, заимствованными из вавилонской метрологии (сутки имеют 24 часа; час имеет 60 минут; минута имеет 60 секунд).

Древнейшие метрологии заключали в себе измерение длин, площадей (земельных участков), объемов, веса, времени, а также монетные системы, связанные обычно с измерением веса.

До конца XIX в. большинство европейских стран имело свои особые системы измерений; особенно много их было в средние века и в новое время, когда Европа была раздроблена на много мелких государств. Азиатские, американские и другие страны и народы также имели свои особые системы мер и весов.

В старых русских рукописях (в «Русской правде» и др.) сохранились сведения о единицах измерения, которыми пользовались в IX—XIII вв. в Киевской Руси. Подобно тому, как это было в Западной Европе, отдельные русские земли имели свои меры и весы. Регламентация мер была начата в Московской Руси и получила свое завершение при Петре I. Единица длины — сажень, была приравнена 7 английским футам. Тогда же были установлены меры сыпучих тел: гарнец и четверик, равный 8 гарнцам. До XVII в. была установлена величина десятины, как единицы измерения площадей, равная 80×30 саженей, а также сложились меры веса: 1 пуд равен 40 фунтам и др.

С развитием общества росли требования к точности мер и измерений. Усилились торговые связи между отдельными странами и народами. Однако развитие торговых отношений усложнялось тем, что в каждом государстве существовали разные исторически сложив-

шиеся системы мер и под одним и тем же названием в разных местностях зачастую подразумевались разные величины, например существовали 100 различных футов (рабочий, землемерный, ткацкий, портняжный, инженерный, геометрический и др.), 120 различных фунтов (большой, малый, обыкновенный, казенный, торговый, городской, медицинский, горный и др.), 46 различных миль и т. д.

Бессистемность мер использовали купцы и крупные землевладельцы для еще большего закабаления бедного населения: меряя собственным аршином и собственным фунтом, они извлекали для себя максимальные прибыли.

Реформа системы мер была вызвана не столько научными интересами, сколько материальными интересами народных масс, которые страдали от путаницы всей системы мер, от отсутствия правительственного контроля за мерами, от права феодальных владельцев вводить собственные меры.

Метрическая система мер была разработана французской Академией наук в 90-х годах XVIII в. во время Французской буржуазной революции и была введена во Франции 7 апреля 1795 г. В основу метрической системы была положена единица длины — метр, равная длине одной сорокамиллионной части Парижского меридиана. Все остальные единицы измерений находились в определенных соотношениях с метром, причем за основу была принята десятичная система счисления, вследствие чего метрическая система экономически была самой выгодной. Несмотря на это, проведение новой системы в жизнь встретило большие препятствия. Проведение реформы мер было не в интересах крупной буржуазии, пришедшей к власти во Франции, а восстановление королевской власти (1815 г.) содействовало забвению метрической системы, наряду с другими достижениями революции.

Революционное происхождение метрической системы препятствовало ее распространению и в других странах. Например, в 1823 г. петербургский академик Н. И. Фусс забраковал руководство геометрии Н. И. Лобачевского, мотивируя тем, что в нем за единицу длины принят метр, а за единицу измерения дуг — градус, а «сие разделение выдумано было во время Французской революции, когда бешенство нации уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга».

В 1869 г. Петербургская Академия наук обратилась к научным учреждениям всего мира с призывом пересмотреть основание метрической системы с тем, чтобы она могла стать международной.

Достижения науки требовали заменить определение метра как одной десятимиллионной четверти меридиана, так как архивный метр не совпадал ни с одним из результатов последних измерений. По предложению Петербургской Академии наук были приняты архивные эталоны метра и килограмма за прототипы.

В 1877 г. в Париже на средства двадцати государств — участников «Конференции метра» было создано «Международное бюро мер и весов», которому вменено в обязанность хранить эталоны мер и изготовлять их образцы.

Новый эталон метра был изготовлен из устойчивого сплава платины и иридия и вместе с эталоном килограмма (масса 1,000028 *куб. дм* воды при 4° С) помещен в подвалах бюро на хранение (Франция, Бретёйльский павильон).

В царской России большую работу по подготовке и внедрению в обиход метрической системы мер провели Б. С. Якоби и Д. И. Менделеев, который с 1892 г. стоял во главе Главной палаты мер и весов, преобразованной впоследствии во Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева.

Новая реформа мер (введение системы СИ) является только дальнейшим шагом по уточнению единиц измерения в международных интересах.

§ 31. Именованные числа

1. Числа отвлеченные и именованные. Численное значение величины, взятое вместе с указанием единиц измерения, называется *именованным* числом. Так, 5 *кг*, 35 *см* — именованные числа. Если же при числе не указано единиц измерения, то такое число называется *отвлеченным* (35 — отвлеченное число).

Именованное число называется *простым*, если численное значение величины выражено одной единицей измерения, например 8 *см*. Именованное число называется *составным*, если численное значение величины выражено несколькими единицами измерения, например 5 *м* 25 *см*.

2. Превращение и раздробление именованных чисел. Преобразование именованного числа в единицы какого-нибудь низшего наименования называется *раздроблением*, а обратное преобразование в единицы высшего наименования называется *превращением*, или *укрупнением*. Так, преобразование числа 2 *км* 25 *м* в 2025 *м* есть раздробление, а обратное преобразование числа 2025 *м* в 2 *км* 25 *м* — превращение. Раздробление и превращение именованных чисел выполняется в большинстве случаев устно и записывается так:

Раздробление: 75 руб. 17 коп. = 7517 коп.;

$$7\ кг\ 250\ г = 7250\ г;\quad 27\ м\ 15\ см\ 5\ мм = 27155\ мм.$$

Превращение: 3574 коп. = 35 руб. 74 коп.; 6005 *м* = 6 *км* 5 *м*.

В отдельных случаях, если устно трудно выполнить раздробление или превращение, то следует использовать форму полуустного вычисления. Записывать можно, например, так:

а) Раздробить в секунды 17 *ч* 24 *мин* 39 *сек.*

$$\begin{array}{r} \times\ 60 \\ \hline 17 \\ \hline + \quad 1020 \\ \hline 24 \\ \hline \times\ 1044 \\ \hline 60 \\ \hline + \quad 62640 \\ \hline 39 \\ \hline 62679 \end{array}$$

17 *ч* 24 *мин* 39 *сек* = 62679 *сек.*

3. Действия с именованными числами. Арифметические действия с именованными числами выполняются так же, как и с отвлеченными числами, только здесь иногда одновременно с выполнением действия делают и некоторые преобразования. Поэтому различают действия *с преобразованием* и *без преобразований.*

Ниже на примерах показано, как принято записывать действия с именованными числами.

Сложение

+ 257 *м* 149 *м* 406 *м*	+ 375 *г* 26 *кг* 935 *г* 26 *кг* 1310 *г* 27 *кг* 310 *г*	+ 12 *м* 7 *дм* 2 *см* 8 *м* 8 *дм* 8 *см* 20 *м* 15 *дм* 10 *см* 21 *м* 6 *дм*

Вычитание

− 37 *км* 750 *м* 15 *км* 385 *м* 22 *км* 365 *м*	− 7 *м* 2 *дм* 5 *см* 5 *м* 8 *дм* 6 *см* 1 *м* 3 *дм* 9 *см*

Умножение

Запись при письменном умножении составных именованных чисел можно вести по двум формам.

Пример. 35 *км* 252 *м* × 125.

А.

$$\begin{array}{r} \times\ 35\ км\ 252\ м \\ \hline 125 \\ \hline 4406\ км\ 500\ м \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 252\ м \\ \hline 125 \\ \hline 1260 \\ + \quad 504 \\ \hline 252 \\ \hline 31500\ м = 31\ км \\ 500\ м \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 35\ км \\ \hline 125 \\ \hline 175 \\ + \quad 70 \\ \hline 35 \\ \hline 4375\ км \\ + \quad 31\ км\ 500\ м \\ \hline 4406\ км\ 500\ м \end{array}$$

Б.

35 км 252 м × 125

× 35252 м
125

176260
+ 70504
35252

4406500 м

4406 км 500 м

Деление

При делении именованных чисел различают два случая:

а) деление именованного числа на абстрактное число, т. е. деление на равные части;

б) деление именованного числа на именованное число, т. е. деление по содержанию.

а) Письменное *деление на равные части* выполняется так:

Без раздробления.

312 кг 420 г	12
24	26 кг 35 г
72	
72	
420 г	
36	
60	
60	
0	

С раздроблением.

5 кг 120 г	16
5120 г	320 г
48	
32	
32	
0	

б) Письменное *деление по содержанию* выполняется так:

65 ч 15 мин	45 мин
3915 мин	87
360	
315	
315	
0	

33 *кг* 950 *г* : 2 *кг* 425 *г*

$$\begin{array}{r|l} 33950\ г & 2425\ г \\ \hline 2425 & 14 \\ \hline 9700 & \\ 9700 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

§ 32. Отношение чисел

1. Отношение чисел. Как уже отмечалось (стр. 49), частное от деления одного числа на другое называется также их *отношением*. Таким образом, частное и отношение обозначают одно и то же понятие. Однако, когда говорят «частное», имеют в виду одно число, полученное в результате деления двух данных чисел. Когда же говорят «отношение», имеют в виду пару чисел, соединенных знаком деления. Например, если разделить 10 на 2, получим $10 : 2 = 5$. В данном случае говорят, что частное от деления 10 на 2 равно 5, говорят также, что отношение 10 к 2 равно 5. Но само отношение данных чисел записывают в виде $10 : 2$, или $\frac{10}{2}$. Понятно, что числа $10 : 2$ и 5 равны. Поэтому и говорят, что отношение — то же самое, что и частное.

Для обозначения отношения используют дробную черту или двоеточие — знак деления.

Определив величину отношения, получаем ответ на вопрос, во сколько раз одно число больше другого или какую часть другого числа оно составляет.

В общем виде отношение записывают так: $a : b$.

Числа a и b называются *членами отношения*. Первый член a называется *предыдущим*, второй b — *последующим*. Например, в отношении $4 : 5$ число 4 есть предыдущий член, 5 — последующий. Из двух чисел можно составить два отношения, например из 7 и 8 имеем: $8 : 7$ и $7 : 8$. Эти отношения отличаются друг от друга тем, что предыдущий член одного является последующим членом другого и наоборот. Такие два отношения называются *обратными*. Произведение обратных отношений равно единице:

$$\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1.$$

Так как отношение двух чисел получают с помощью деления, то для него справедливы все свойства частного. *Основное свойство отношения: величина отношения не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число.*

Членами отношения могут быть любые числа, только последующий член не может быть равен нулю. Поэтому возможны и такие отношения: $2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$, или $\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}}$.

Чтобы получить отношение двух именованных чисел, надо дать эти числа в одних единицах измерения.

Пример. Найти отношения 73 *см* к 2,92 *м*.

Решение. $\frac{73\ см}{2{,}92\ м} = \frac{73\ см}{292\ см} = 0{,}25$.

2. Сокращение членов отношения и замена отношения дробных чисел отношением целых чисел. Используя основное свойство отношения, выполняем два преобразования: 1) сокращение членов отношения и 2) замену отношения дробных чисел отношением целых чисел. Как это выполняется, видно из следующих примеров. IX

Пример 1. Сократить члены отношения: 48 : 32.

Решение. 48 : 32 = 3 : 2.

Пример 2. Заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел: $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$.

Решение. $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} : \frac{2}{3} = \frac{9}{6} : \frac{4}{6} = 9 : 4$.

Мы привели дроби к общему знаменателю, а затем умножили предыдущий и последующий члены отношения на их общий знаменатель (на 6).

Примечание. Раньше различали *разностные* отношения (вида $a - b$) и *кратные* отношения (вида $a : b$). Теперь понятие «разностное отношение» не употребляют. А то, что раньше называли «кратным отношением», называют «отношением».

§ 33. Пропорции

1. Понятие о пропорции. *Пропорцией* называют равенство двух отношений. Общий вид пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, или $a : b = c : d$.

Примеры пропорций.

$$3 : 4 = 9 : 12,$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12},$$

$$10 : 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} : \frac{1}{3}.$$

$$20\ м : 4\ м = 10\ кг : 2\ кг.$$

Пропорции читают так: «3 относится к 4, как 9 к 12», «10 относится к $2\frac{1}{2}$, как $1\frac{1}{3}$ к $\frac{1}{3}$» и т. д. Или: «отношение 3 к 4 равно отношению 9 к 12»; «10 во столько раз больше $2\frac{1}{2}$, во сколько раз $1\frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{3}$».

Члены отношений, составляющих пропорцию, называются *членами пропорции*. Пропорция состоит из четырех членов. Первый и последний члены, т. е. члены, стоящие по краям, называются *крайними*, а члены пропорции, находящиеся в середине, называются *средними* членами. Так, в первой пропорции числа 3 и 12 будут крайними членами, а числа 4 и 9 — средними членами пропорции.

Все члены пропорции могут быть абстрактными числами, но два члена одного отношения (или обоих отношений) могут быть и однородными именованными числами:

$$3\frac{1}{2}\ кг : 5\ кг = \frac{1}{2}\ м : \frac{5}{7}\ м.$$

2. Основное свойство пропорции. *Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов.*

В общем виде это свойство пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ записывают так: $ad = bc$.

Основное свойство пропорции может быть использовано для проверки правильности составленных пропорций.

Пример. Проверить правильность пропорции.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}.$$

Решение. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{48} \cdot 20$. Пропорция правильная, так как выполняется основное свойство пропорции: $\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$.

Правильность пропорции может быть проверена также путем вычисления каждого из двух отношений, которые составляют пропорцию.

Пример. Проверить пропорцию $0{,}75 : 1\frac{1}{5} = 1{,}25 : 2{,}5$.

Решение. $0{,}75 : 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $1{,}25 : 2{,}5 = \frac{1}{2}$.

Величина отношений одинакова, следовательно, пропорция составлена правильно.

Итак, из приведенных примеров видно, что если мы напишем такое равенство, у которого в левой части стоит произведение одних двух чисел, а в правой части произведение двух других чисел, то из этих четырех чисел можно составить пропорцию.

3. Вычисление неизвестных членов пропорции. Вычисление неизвестного члена пропорции называют решением пропорции. Для вычисления членов пропорции используются следствия из ее основного свойства.

1) *Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, деленному на известный крайний*, т. е. если $x : a = b : c$, то $x = \frac{ab}{c}$.

2) *Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на известный средний*, т. е., если $a : x = b : c$, то $x = \frac{ac}{b}$.

Пример 1. $x : 12 = 4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$; $x = \frac{12 \cdot 4\frac{3}{4}}{7\frac{1}{8}} = \frac{12 \cdot \frac{19}{4}}{\frac{57}{8}} =$

$$= \frac{12 \cdot 19 \cdot 8}{4 \cdot 57} = 8.$$

Пример 2. $10{,}4 : 3\frac{5}{7} = x : \frac{5}{11}$; $x = \frac{10{,}4 \cdot \frac{5}{11}}{3\frac{5}{7}} = \frac{10\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{11}}{3\frac{5}{7}} =$

$$= \frac{\frac{52}{5} \cdot \frac{5}{11}}{\frac{26}{7}} = \frac{52 \cdot 7}{11 \cdot 26} = \frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}.$$

4. Перестановка членов пропорции. В каждой пропорции можно переставить: а) средние члены, б) крайние члены, в) средние и крайние; г) крайние на место средних и средние на место крайних. Всего можно получить из данной пропорции 8 пропорций (включая данную). В буквенной записи они принимают такой вид:

$$a : b = c : d \qquad c : d = a : b$$
$$d : b = c : a \qquad b : d = a : c$$
$$a : c = b : d \qquad c : a = d : b$$
$$d : c = b : a \qquad b : a = d : c$$

Для всех этих пропорций выполняется основное свойство: $ad = bc$.

Пример. Выполнить возможные перестановки членов в пропорции $5 : 3 = 20 : 12$.

Решение.

$$\begin{array}{ll} 5 : 3 = 20 : 12 & 3 : 5 = 12 : 20 \\ 5 : 20 = 3 : 12 & 3 : 12 = 5 : 20 \\ 20 : 5 = 12 : 3 & 12 : 20 = 3 : 5 \\ 20 : 12 = 5 : 3 & 12 : 3 = 20 : 5 \end{array}$$

Примечание. Если в пропорции средние или крайние члены равны (такие пропорции называют *непрерывными*), то из нее можно получить путем перестановки членов только 4 разных пропорций. Например,

$$\begin{array}{ll} 18 : 6 = 6 : 2 & 2 : 6 = 6 : 18 \\ 6 : 18 = 2 : 6 & 6 : 6 = 18 : 6 \end{array}$$

5. Упрощение пропорций. К числу преобразований, не нарушающих пропорцию, относится:

1) одновременное увеличение или уменьшение обоих членов любого отношения в одинаковое число раз;

2) одновременное увеличение или уменьшение обоих предыдущих или обоих последующих членов в одинаковое число раз;

3) одновременное увеличение или уменьшение всех членов пропорции в одинаковое число раз.

Перечисленные преобразования дают возможность упрощать пропорции, в частности освобождать их от дробных членов.

Примеры. Упростить пропорции:

а) $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 20 : 30$;

б) $12 : \frac{15}{14} = 16 : \frac{10}{7}$; в) $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}$.

Решение. а) Приведем дроби к общему знаменателю: $\frac{2}{8} : \frac{3}{8} = 20 : 30$. Умножив на 8 оба члена первого отношения, получим: $2 : 3 = 20 : 30$.

б) Приведем дроби к общему знаменателю: $12 : \frac{15}{14} = 16 : \frac{20}{14}$. Умножив оба последующих члена на 14, получим $12 : 15 = 16 : 20$.

в) Умножив все члены пропорции $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}$ на 48, получим $24 : 1 = 960 : 40$, или $24 : 1 = 96 : 4$.

6. Производные пропорции. Если к обеим частям данной пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

прибавить по 1, то получим

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$

или

$$\text{а)}\quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Словами это можно выразить так. *Сумма членов первого отношения данной пропорции относится к его последующему члену, как сумма членов второго отношения относится к его последующему.*

Пример. Если $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$, то $\frac{8}{3} = \frac{32}{12}$.

Аналогично из данной пропорции можно получить следующие:

$$\text{б)}\quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

т. е. разность членов первого отношения относится к его последующему члену, как разность членов второго отношения к его последующему члену;

$$\text{в)}\quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c},$$

т. е. сумма членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как сумма членов второго отношения относится к его предыдущему члену;

$$\text{г)}\quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c},$$

т. е. разность членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как разность членов второго отношения относится к его предыдущему члену;

$$\text{д)}\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d},$$

т. е. сумма членов первого отношения относится к их разности, как сумма членов второго отношения относится к их разности;

$$\text{е)}\quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

т. е. сумма предыдущих членов пропорции относится к сумме последующих, как каждый предыдущий к своему последующему.

Все эти и многие другие пропорции, получаемые из данной, называются *производными пропорциями*.

7. **Свойство равных отношений.** Последний пример производной пропорции можно обобщить на случай нескольких равных отношений. Если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

т. е. *если несколько отношений равны друг другу, то сумма всех предыдущих их членов так относится к сумме всех последующих, как каждый предыдущий член к своему последующему.*

Пример. Если $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$, то $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$.

§ 34. Пропорциональная зависимость величин

1. Величины прямо пропорциональные. Значения двух различных величин могут взаимно зависеть друг от друга. Так, площадь квадрата зависит от длины его стороны и, обратно, длина стороны квадрата зависит от его площади.

Если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) значения одной из них в несколько раз соответствующее значение другой увеличивается (уменьшается) во столько же раз, то такие величины в арифметике называются прямо пропорциональными *.

Примеры. Время работы и заработок, полученный за это время при поденной оплате труда, — величины прямо пропорциональные, так как чем больше работает рабочий, тем больше его заработок, причем за три дня, например, он получает втрое больше, чем за один день. Длина стороны квадрата и его площадь — не прямо пропорциональны, так как с увеличением стороны вдвое площадь квадрата увеличивается не в 2 раза, а в 4.

Прямо пропорциональные величины обладают следующим свойством: если две величины прямо пропорциональны, то *отношение двух произвольно взятых значений первой величины равно отношению*

---

* В алгебре дается иное определение прямо пропорциональной зависимости величин (см. стр. 305).

двух соответствующих значений второй величины. Отсюда следует, что для данной пары прямо пропорциональных величин частное от деления любого значения одной величины на соответствующее значение другой величины есть число постоянное. Это постоянное число называется *коэффициентом пропорциональности.*

Обозначив какое-либо значение одной величины буквой y, а соответствующее значение другой величины — буквой x, определим коэффициент пропорциональности k так: $\frac{y}{x} = k$. Отсюда, $y = kx$. Это равенство называется *формулой прямой пропорциональности.*

Пример. При постоянной скорости время движения и расстояние, пройденное движущимся телом за это время, — величины прямо пропорциональные. Пусть, например, поезд движется равномерно со скоростью 50 *км/ч*. Тогда за 1 *ч*, 2 *ч*, 3 *ч*, 4 *ч* и т. д. он пройдет соответственно 50 *км*, 100 *км*, 150 *км*, 200 *км* и т. д. Отношения $\frac{50}{1}$, $\frac{100}{2}$, $\frac{150}{3}$, $\frac{200}{4}$ равны, так как каждое из них равно 50. Число 50 здесь и есть коэффициентом пропорциональности. Если обозначить время движения поезда буквой x, а расстояние, пройденное поездом за это время буквой y, то получим формулу $y = 50x$. Пользуясь этой формулой, можно узнать, сколько километров пройдет поезд за любое данное время. Например, если $x = 5$, то $y = 250$. Следовательно, за 5 *ч* поезд пройдет 250 *км*.

2. **Величины обратно пропорциональные.** *Если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) значения одной из них в несколько раз значение другой соответственно уменьшается (увеличивается) во столько же раз, то такие величины называются обратно пропорциональными.* Например, если на 15 руб. нужно купить несколько килограммов конфет, то количество конфет будет зависеть от цены одного килограмма. Во сколько раз выше цена, во столько раз меньше можно купить на эти деньги конфет.

Обратно пропорциональные величины обладают следующим свойством: *если две величины обратно пропорциональны, то отношение двух произвольно взятых значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.*

Отсюда можно сделать такой вывод: для данной пары обратно пропорциональных величин *произведение любого значения одной величины на соответствующее значение другой величины есть число постоянное.*

Обозначим некоторое значение одной величины буквой x, а соответствующее значение другой величины буквой y. Тогда $xy = k$. Отсюда $y = \frac{k}{x}$. Это равенство называется *формулой обратной пропорциональности.*

Пример. Если покупать товар стоимостью в 1 руб., 1,5 руб., 2 руб., 3 руб. за килограмм, то за 15 руб. можно купить соответственно:

$$15\ кг,\ 10\ кг,\ 7{,}5\ кг,\ 5\ кг.$$

Здесь количество килограммов обратно пропорционально стоимости одного килограмма. Произведения $1 \cdot 15$; $1{,}5 \cdot 10$; $2 \cdot 7{,}5$; $3 \cdot 5$ равны, так как каждое из них равно 15.

§ 35. Задачи на пропорциональные величины

1. Простое тройное правило. Из задач на пропорциональные величины наиболее часто встречаются задачи на так называемое *простое тройное правило*. В этих задачах даны три числа и требуется определить четвертое, пропорциональное к ним.

Задача 1. 10 болтов весят 4 *кг*. Сколько весят 25 таких болтов? Такие задачи можно решать несколькими способами.

Решение I (способом приведения к единице).

1) Сколько весит один болт?

$$4\ кг : 10 = 0{,}4\ кг.$$

2) Сколько весят 25 болтов?

$$0{,}4\ кг \cdot 25 = 10\ кг.$$

Решение II (способом пропорций). Так как вес болтов прямо пропорциональный их количеству, то отношение весов равно отношению штук (болтов). Обозначив искомый вес буквой x, получим пропорцию:

$$x : 4 = 25 : 10,$$

откуда

$$x = \frac{4 \cdot 25}{10} = 10\ (кг).$$

Можно рассуждать и так: 25 болтов больше 10 болтов в 2,5 раза. Следовательно, они тяжелее 4 *кг* тоже в 2,5 раза:

$$4\ кг \cdot 2{,}5 = 10\ кг.$$

Ответ. 25 болтов весят 10 *кг*.

Задача 2. Первое зубчатое колесо делает 50 *об/мин*. Второе зубчатое колесо, сцепленное с первым, делает 75 *об/мин*. Найти число зубьев второго колеса, если число зубьев первого равно 30.

Решение (способом приведения к единице). Оба сцепленные зубчатые колеса передвинутся за минуту на одинаковое число зубьев,

поэтому число оборотов колес обратно пропорционально числу их зубьев.

50 обор. — 30 зуб.
75 обор. — x зуб.

$$x : 30 = 50 : 75; \quad x = \frac{30 \cdot 50}{75} = 20 \text{ (зубьев)}.$$

Можно рассуждать и так: второе колесо делает оборотов в 1,5 раза больше первого (75 : 50 = 1,5). Следовательно, оно имеет зубьев в 1,5 раза меньше первого:

$$30 : 1{,}5 = 20 \text{ (зубьев)}.$$

Ответ. 20 зубьев.

2. Сложное тройное правило. Задачи, в которых по данному ...му ряду соответствующих друг другу значений нескольких (более двух) пропорциональных величин требуется найти значение одной из них, соответствующее другому ряду данных значений остальных величин, называют задачами на *сложное тройное правило*.

Задача. 5 насосов в течение 3 *ч* выкачали 1800 ведер воды. Сколько воды выкачают 4 таких насоса в течение 4 *ч*?

Решение.

5 нас. 3 *ч* — 1800 вед.
4 нас. 4 *ч* — x вед.

1) Сколько ведер воды выкачал 1 насос в течение 3 *ч*?

$$1800 : 5 = 360 \text{ (ведер)}.$$

2) Сколько ведер воды выкачал 1 насос в течение 1 *ч*?

$$360 : 3 = 120 \text{ (ведер)}.$$

3) Сколько воды выкачают 4 насоса за 1 *ч*?

$$120 \cdot 4 = 480 \text{ (ведер)}.$$

4) Сколько воды выкачают 4 насоса за 4 *ч*?

$$480 \cdot 4 = 1920 \text{ (ведер)}.$$

Ответ. 1920 ведер.

Сокращенное решение по числовой формуле:

$$x = \frac{1800 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 3} = 1920 \text{ (ведер)}.$$

3. Пропорциональное деление.

Задача. Разделить число 100 на две части прямо пропорционально числам 2 и 3.

Эту задачу следует понимать так: разделить 100 на две части, чтобы первая относилась ко второй, как 2 к 3. Если обозначить искомые числа буквами x_1 и x_2, то эту задачу можно сформулировать и так. Найти x_1 и x_2 такие, чтоб

$$x_1 + x_2 = 100,$$
$$x_1 : x_2 = 2 : 3.$$

Такие задачи решают, пользуясь следующим правилом.

Чтобы разделить число на части прямо пропорционально нескольким данным числам, достаточно разделить его на сумму этих чисел и частное умножить на каждое из этих чисел.

Решим приведенную выше задачу.

$$x_1 = \frac{100 \cdot 2}{2+3} = 40; \quad x_2 = \frac{100 \cdot 3}{2+3} = 60.$$

Ответ. 40 и 60.

Аналогично делят числа на три и более частей, пропорционально данным числам.

Задача. Разделить 780 на четыре части пропорционально числам 1,5; 0,75; 0,4; 1,25.

Эту задачу следует понимать так: если обозначить искомые числа через x_1, x_2, x_3 и x_4, то:

$$x_1 : x_2 = 1{,}5 : 0{,}75;$$
$$x_2 : x_3 = 0{,}75 : 0{,}4;$$
$$x_3 : x_1 = 0{,}4 : 1{,}25;$$

Коротко условились записывать это так:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1{,}5 : 0{,}75 : 0{,}4 : 1{,}25.$$

После замены отношения дробных чисел отношением целых чисел получим схематическую запись:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 30 : 15 : 8 : 25.$$
$$\frac{780}{30+15+8+25} = 10,$$
$$x_1 = 10 \cdot 30 = 300,$$
$$x_2 = 10 \cdot 15 = 150 \text{ и т. д.}$$

Чтобы разделить число на части обратно пропорционально данным числам, надо разделить его прямо пропорционально числам, обратным данным.

Задача. Разделить число 52 на три части обратно пропорционально числам 4, 6 и 8.

Р е ш е н и е. Числа, обратные данным, будут: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$. Следовательно, $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = 6 : 4 : 3$.

$$x_1 = \frac{52 \cdot 6}{6 + 4 + 3} = 24,$$

$$x_2 = \frac{52 \cdot 4}{6 + 4 + 3} = 16,$$

$$x_3 = \frac{52 \cdot 3}{6 + 4 + 3} = 12.$$

О т в е т. 24, 16 и 12.

§ 36. Арифметические задачи

1. **Общие сведения.** Различают арифметические задачи *на вычисление, доказательство и исследование.*

Рассмотрим несколько арифметических задач.

1. У ученика было 12 тетрадей, 5 тетрадей он списал. Сколько тетрадей у него осталось?

2. Доказать, что если к трехзначному числу приписать такое же число, то полученное шестизначное число будет обязательно делиться на 7, 11 и 13.

3. Существуют ли числа, которые при делении на 9 дают в остатке 5, а при делении на 15 дают остаток 6?

Первая из этих задач — на вычисление, вторая — на доказательство, третья — на исследование.

В каждой арифметической задаче даны некоторые числа, соотношения и т. д. и сформулированы некоторые требования. То, что дано в задаче, называется ее *условием* *, что требуется сделать — *требованием* или *вопросом*. *Решить задачу* — значит выполнить то, что требуется в ней. В результате решения задачи получают *ответ* или *решение*.

Обычно арифметические задачи содержат лишь такие данные, которые необходимы и достаточны для получения определенного единственного ответа. Такие задачи называют *определенными*. Но иногда встречаются задачи, имеющие несколько и даже бесконечное множество решений; их называют *неопределенными* задачами. Бывают и такие задачи, которые не имеют ни одного решения; их называют *переопределенными* задачами. Иногда к переопределенным относят

* Иногда условием задачи называют всю задачу, включая и вопрос или требование.

и такие задачи, которые имеют единственное решение, но все же содержат лишние числовые данные.

2. Арифметические задачи на вычисление. Арифметической задачей на вычисление называют требование определить численное значение какой-либо величины по известным численным значениям других величин, находящихся в определенной зависимости между собой и с искомым. Необходимыми элементами арифметической задачи на вычисления являются:

1) числовые данные;

2) словесные пояснения той зависимости, которая имеется между данными числами и между данными и искомыми;

3) тот вопрос задачи, ответ на который требуется найти.

Все арифметические задачи на вычисление принято делить на простые и составные. *Простыми* называются задачи, которые можно решить одним действием. Задачи, которые невозможно решить одним действием, называют *составными*.

Рассмотрим важнейшие типы составных арифметических задач.

3. Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

Задача 1. Кусок полотна в 104 *м* надо разрезать на 2 такие части, чтобы в первой было на 16 *м* больше, чем во второй. Сколько метров полотна будет в каждой части?

Решение. Если бы первая часть куска по длине была такая же, как вторая, т. е. на 16 *м* меньше, чем в действительности (рис. 8), то весь кусок имел бы

$$104\ м - 16\ м = 88\ м.$$

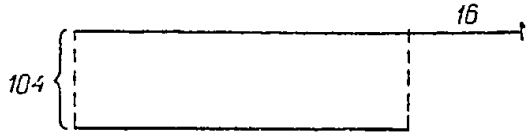


Рис. 8.

Разделив его пополам, получим длину второй части:

$$88\ м : 2 = 44\ м.$$

Тогда первая часть имеет:

$$44\ м + 16\ м = 60\ м.$$

Ответ. 60 *м* и 44 *м*.

Примечание. Вместо последнего действия можно было бы выполнить иное: $104\ м - 44\ м = 60\ м$.

Можно было бы предположить, что вторая часть такая же, как первая. Тогда имели бы:

$$104\ м + 16\ м = 120\ м,$$
$$120\ м : 2 = 60\ м,$$
$$60\ м - 16\ м = 44\ м.$$

Можно эту задачу решить и таким способом. Искомые числа могут быть уравнены, если от большего отнять и прибавить к меньшему их полуразность (рис. 9). Следовательно,

$$104\ м : 2 = 52\ м.$$
$$16\ м : 2 = 8\ м,$$
$$52\ м + 8\ м = 60\ м,$$
$$52\ м - 8\ м = 44\ м.$$

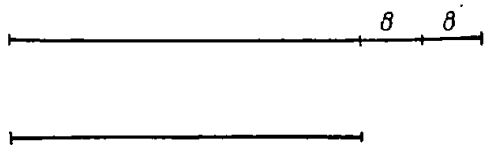


Рис. 9.

Задача 2. На опытном участке площадью 940 *кв. м* имеется виноградник, фруктовый сад, полевые культуры и овощи. Площадь виноградника меньше площади сада на 120 *кв. м*, площадь под полевыми культурами больше площади виноградника на 40 *кв. м*, а площадь под овощами меньше площади полевых культур на 60 *кв. м*. Какова площадь сада, виноградника, полевых культур и овощей?

Решение. Из условия задачи видно, что наименьшая площадь под овощами. Она меньше площадей под полевыми культурами, виноградниками и садом соответственно на 60 *кв. м*, 20 *кв. м* и 140 *кв. м* (рис. 10). Следовательно, если из общей площади вычесть сумму приведенных выше чисел, получим учетверенную площадь под овощами:

$$940 - (60 + 20 + 140) = 720\ (кв.\ м).$$

Тогда площадь под овощами равна:

$$720\ кв.\ м : 4 = 180\ кв.\ м,$$

под полевыми культурами:

$$180\ кв.\ м + 60\ кв.\ м = 240\ кв.\ м,$$

под виноградником:

$$180 \text{ кв. м} + 20 \text{ кв. м} = 200 \text{ кв. м},$$

под садом:

$$180 \text{ кв. м} + 140 \text{ кв. м} = 320 \text{ кв. м}.$$

Ответ. 320 *кв. м*, 200 *кв. м*, 240 *кв. м* и 180 *кв. м*.

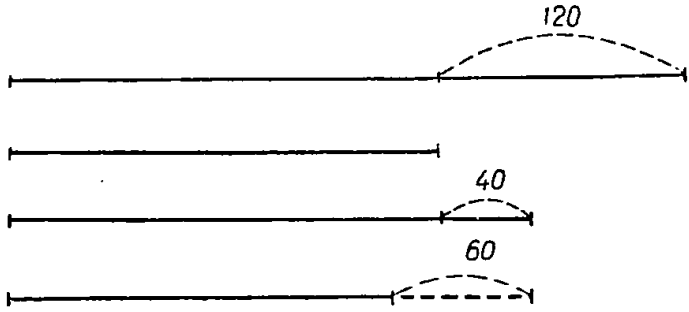


Рис. 10.

Задача 3. В двух участках земли было 24,27 *га*. Если бы от первого отрезать 3,5 *га* и прибавить ко второму, то в первом все-таки оказалось бы на 0,61 *га* больше, чем во втором. Каковы размеры каждого участка?

Решение. Первый участок больше второго (рис. 11) на

$$3{,}5 \cdot 2 + 0{,}61 = 7{,}61 \text{ (га)}.$$

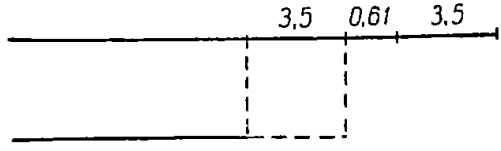


Рис. 11.

Тогда площадь удвоенного второго участка будет:

$$24{,}27 - 7{,}61 = 16{,}66 \text{ (га)}.$$

Следовательно, второй участок имеет

$$16{,}66 : 2 = 8{,}33 \text{ (га)},$$

а первый:

$$8{,}33 + 7{,}61 = 15{,}94 \text{ (га)}.$$

Ответ. 15,94 *га* и 8,33 *га*.

4. Задачи на нахождение двух чисел по их сумме или разности и отношению.

Задача 1. В двух ящиках 390 болтов. Сколько болтов в каждом ящике, если число болтов во втором составляет $\frac{2}{3}$ числа болтов первого ящика?

Решение. Принимаем, что число болтов в первом ящике составляет одну часть. Тогда число болтов во втором ящике составит $\frac{2}{3}$ такой части. Следовательно, 390 болтов составляют $1\frac{2}{3}$ части. Значит, в первом ящике

$$390 : 1\frac{2}{3} = 234 \text{ (болта)},$$

а во втором

$$234 \cdot \frac{2}{3} = 156 \text{ (болтов)}.$$

Ответ. 234 болта, 156 болтов.

Задача 2. Разность двух чисел равна 14. Частное от деления большего числа на меньшее равно $4\frac{1}{3}$. Найти эти числа.

Решение. Так как частное от деления большего числа на меньшее равно $4\frac{1}{3}$, то меньшее число составляет 1 часть, а большее — $4\frac{1}{3}$ таких частей. Имеем: $4\frac{1}{3} - 1 = 3\frac{1}{3}$ (части) составляет разность чисел 14; $14 : 3\frac{1}{3} = 4\frac{1}{5}$ — меньшее число; $4\frac{1}{5} \cdot 4\frac{1}{3} = 18\frac{1}{5}$ — большее число.

Ответ. 18,2 и 4,2.

Задача 3. На одном складе в 3 раза больше муки, чем на другом. Если из одного склада вывезти 850 *кг*, а из другого 50 *кг*, то на обоих складах останется муки поровну. Сколько муки было на каждом складе?

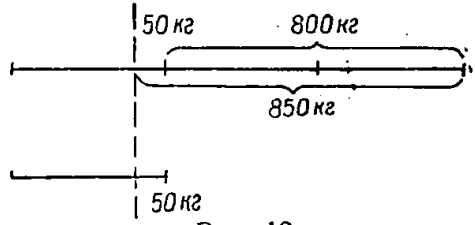


Рис. 12.

Р е ш е н и е. Из рис. 12 ясно, что $\frac{2}{4}$ части имеющейся муки составляют 800 *кг*, значит, на втором складе было 400 *кг* $\left(\frac{1}{4}\text{ часть}\right)$, на первом — 1200 *кг* (3 части).

О т в е т. 1200 *кг*, 400 *кг*.

З а д а ч а 4. Разность двух чисел равна 40. Если из первого числа вычесть $\frac{4}{5}$ его, а из второго $\frac{2}{3}$ его, то получим равные остатки. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. Разность 40 показывает, что одно число больше другого на 40. Кроме того, известно, что $\frac{1}{5}$ часть первого числа $\left(1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\right)$ равна $\frac{1}{3}$ второго $\left(1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\right)$. Какое из этих чисел больше? Первое число больше, так как меньшая его часть, только $\frac{1}{5}$, равна $\frac{1}{3}$ второго числа, а все первое число будет равно: $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}=\frac{5}{3}$ второго. Если первое число состоит из 5 частей, то второе состоит из трех таких же частей. 2 части составляют 40. Тогда легко найти, что первое число равно 100, а второе 60.

О т в е т. 100 и 60.

5. Задачи на исключение одного неизвестного заменой его другим.

З а д а ч а 1. За 5 *кг* яблок и 3 *кг* винограда заплатили 2,8 руб. Сколько стоит килограмм яблок и килограмм винограда, если известно, что килограмм винограда на 0,4 руб. дороже килограмма яблок?

Р е ш е н и е. Заменим 3 *кг* винограда на 3 *кг* яблок.

1) На сколько рублей 3 *кг* яблок дешевле 3 *кг* винограда?

$$0{,}4\text{ руб.}\cdot 3=1{,}2\text{ руб.}$$

2) Сколько килограммов весит вся покупка?

$$5\text{ }кг+3\text{ }кг=8\text{ }кг.$$

3) Сколько стоят 8 *кг* яблок?

$$2{,}8\text{ руб.}-1{,}2\text{ руб.}=1{,}6\text{ руб.}$$

4) Сколько стоит килограмм яблок?

$$1{,}6\text{ руб.}:8=0{,}2\text{ руб.}$$

5) Сколько стоит килограмм винограда?

$$0{,}2 \text{ руб.} + 0{,}4 \text{ руб.} = 0{,}6 \text{ руб.}$$

Ответ. 0,2 руб. и 0,6 руб.

Примечание. Можно было бы решить задачу иначе, заменив 5 *кг* яблок на 5 *кг* винограда. Тогда покупка стоила бы на 2 руб. дороже.

Задача 2. Сосновая шпала весит 27,8 *кг*, а дубовая — 45,5 *кг*. 10 шпал весят 384,2 *кг*. Сколько среди них сосновых и сколько дубовых? *

Решение. 10 шпал, если бы они все были дубовые, весили бы: $45{,}5 \cdot 10 = 455$ (*кг*). На сколько меньше весят 10 сосновых и дубовых шпал, чем 10 дубовых? $455 - 384{,}2 = 70{,}8$ (*кг*).

На сколько дубовая шпала тяжелее сосновой?

$$45{,}5 - 27{,}8 = 17{,}7 \text{ (кг)}.$$

Сколько было сосновых шпал?

$$70{,}8 : 17{,}7 = 4.$$

Сколько было дубовых шпал?

$$10 - 4 = 6.$$

Ответ. 4 шпалы и 6 шпал.

6. Задачи на уравнивание данных.

Задача 1. За 1,5 *кг* товара первого сорта и 28 *кг* второго сорта уплатили 252,5 руб. В другой раз за 30 *кг* второго сорта и 4,5 *кг* первого сорта уплатили 325,5 руб. Сколько стоит 1 *кг* каждого сорта?

Краткая запись условия: 1,5 *кг* I и 28 *кг* II — 252,5 руб.
4,5 *кг* I и 30 *кг* II — 325,5 руб.

Решение. Заметив, что во второй раз куплено в 3 раза больше товара первого сорта, можно уравнять число килограммов товара первого сорта, купленных оба раза. Для этого предполагаем, что первая покупка была в 3 раза больше данной условием. Тогда, имеем:

4,5 *кг* I и 84 *кг* II — 757 руб. 50 коп.
4,5 *кг* I и 30 *кг* II — 325 руб. 50 коп.

При этом предположении товара второго сорта купили на 54 *кг* больше ($84 - 30 = 54$), чем второй раз, и уплатили больше на 432 руб. (757 руб. 50 коп. — 325 руб. 50 коп. = 432 руб.). Тогда 1 *кг* товара второго сорта будет стоить: $432 : 54 = 8$ (руб.) и 28 *кг* этого товара стоят $8 \cdot 28 = 224$ (руб.), а 1,5 *кг* товара первого сорта стоят 252,5—

* Подобные задачи обычно относят к типу «на предположение».

$-224 = 28{,}5$ (руб.), следовательно, 1 *кг* его стоит $28{,}5 : 1{,}5 = 19$ (руб.).

Ответ. 19 руб. и 8 руб.

Задача 2. За 30 тетрадей и 12 карандашей уплатили 96 коп. По той же цене за 20 тетрадей и 7 карандашей уплатили 61 коп. Сколько стоит тетрадь и сколько стоит карандаш?

Запись условия: 30 тетр. и 12 каранд.— 96 коп.
20 » 7 » — 61 коп.

Решение. Уравняем число тетрадей, купленных в обеих покупках. Для этого предполагаем, что первая покупка в два раза, а вторая в три раза была больше действительной, тогда имеем:

60 тетр. и 24 каранд. — 1 руб. 92 коп.
60 » 21 » — 1 руб. 83 коп.

Далее так же, как и в предыдущей задаче, находим стоимость карандаша и тетради.

Ответ. 2 коп. и 3 коп.

7. Задачи на смешение.

Задача 1. Сплавили 180 *г* золота 920-й пробы со 100 *г* 752-й пробы. Какой пробы получился сплав?

Решение. В первом слитке чистого золота было 0,92 от 180 *г*, т. е. $180 \cdot 0{,}92 = 165{,}6$ (*г*). Во втором слитке чистого золота было 0,752 от 100 *г*, т. е. $100 \cdot 0{,}752 = 75{,}2$ (*г*). Следовательно, в полученном сплаве чистого золота содержится $165{,}6 + 75{,}2 = 240{,}8$ (*г*). Общий вес сплава равен $180 + 100 = 280$ (*г*). Его проба равна

$$\frac{240{,}8}{280} \cdot 1000 = 860.$$

Ответ. Получен сплав 860-й пробы.

Задача 2. К 2 *кг* воды прибавили 8 *кг* 70-процентного раствора серной кислоты. Определить процентную концентрацию полученного раствора.

Решение. 1) Сколько в растворе чистой (безводной) кислоты?

$$8 \text{ кг} \cdot 0{,}7 = 5{,}6 \text{ кг}.$$

2) Чему равен вес раствора?

$$2 \text{ кг} + 8 \text{ кг} = 10 \text{ кг}.$$

3) Чему равна процентная концентрация раствора?

$$5{,}6 \text{ кг} : 10 \text{ кг} = 0{,}56 = 56\%.$$

Примечание. Если количество кислоты выражено не в килограммах, а в литрах, то подобные задачи можно решать только с помощью таблиц удельных весов растворов серной кислоты. Рас-

смотрим, например, такую задачу. К 2 *л* воды прибавили 8 *л* 70-процентного раствора серной кислоты. Определить процентную концентрацию полученного раствора.

Решение. В таблице находим удельный вес 70-процентного раствора серной кислоты. Он равен 1,6. Следовательно, 8 *л* этого раствора весят $1{,}6 \cdot 8 = 12{,}8$ (*кг*). Безводной кислоты в нем содержится $12{,}8 \cdot 0{,}7 = 8{,}96$ (*кг*). Концентрация раствора равна $8{,}96 : 14{,}8 = 0{,}6 = 60\%$.

Рассмотренные задачи относятся к задачам на *смешение первого рода*. Они сравнительно не трудны.

Более сложными задачами являются задачи на *смешение второго рода*.

Задача 3. В каком отношении нужно взять два сорта товара стоимостью по 7,5 руб. за 1 *кг* и по 7 руб. за 1 *кг*, чтобы получить смесь стоимостью по 7,2 руб. за 1 *кг*?

Решение. Обозначив неизвестные количества товара ценой 7,5 руб. и 7 руб. за 1 *кг* соответственно через x_1 и x_2, составляем таблицу:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 7{,}5 \text{ руб.} \\ x_2 - 7 \text{ руб.} \end{array}\right\} \; 7{,}2 \text{ руб.} \quad \begin{array}{l} \text{на } 0{,}3 \text{ руб. дороже} \\ \text{на } 0{,}2 \text{ руб. дешевле} \end{array}$$

Далее рассуждаем так. При стоимости 1 *кг* смеси по 7,2 руб. каждый килограмм товара первого сорта оценивался дешевле его стоимости на 0,3 руб., а каждый килограмм второго сорта, вошедший в смесь, оценивался дороже на 0,2 руб.

Для того чтобы уменьшение стоимости первого сорта могло быть покрыто повышением стоимости второго сорта (стоимость всей покупки не изменилась), необходимо, чтобы каждый раз, когда берут 0,2 *кг* товара первого сорта, брали 0,3 *кг* второго сорта, т. е. $x_1 : x_2 = 0{,}2 : 0{,}3$, или $x_1 : x_2 = 2 : 3$.

Ответ. В отношении 2 : 3.

Задача 4. Из двух сплавов с 60-процентным и 80-процентным содержанием меди надо изготовить сплав весом 40 *кг* с 75-процентным содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава надо взять для этого?

Решение. Выражаем содержание меди в граммах на 1 *кг* сплава:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 600\ г \\ x_2 - 800\ г \end{array}\right\} \; 750\ г \quad \begin{array}{l} \text{меньше на } 150\ г \\ \text{больше на } 50\ г \end{array}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{50}{150}; \quad x_1 : x_2 = 1 : 3;$$

$$x_1 = \frac{40}{4} = 10 \text{ (кг)}; \qquad x_2 = \frac{40}{4} \cdot 3 = 30 \text{ (кг)}.$$

Ответ. 10 *кг* и 30 *кг*.

8. Задачи на движение. К арифметическим задачам на движение принадлежат такие, в которых на основании зависимости между временем, скоростью и расстоянием при равномерном движении надо найти одну из этих величин. В зависимости от их содержания различают задачи на встречное движение и на движение в одном направлении.

а) Встречное движение. Задача 1. Из города *A* в 11 *ч* выехала легковая машина и движется со средней скоростью 50 *км/ч* по направлению к городу *B*. Через 30 *мин* навстречу ей из города *B* вышла грузовая машина со средней скоростью 35 *км/ч*. В котором часу произойдет их встреча, если расстояние между городами равно 195 *км* (рис. 13)?

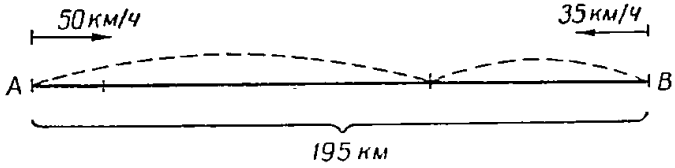


Рис. 13.

Решение. 1) Какое расстояние пройдет легковая машина до выхода грузовой?

$$50 \cdot 0{,}5 = 25 \text{ (км)}.$$

2) Какое расстояние пройдут до встречи при совместном движении легковая и грузовая машины?

$$195 - 25 = 170 \text{ (км)}.$$

3) На сколько километров сближаются за один час легковая и грузовая машины?

$$50 + 35 = 85 \text{ (км)}.$$

4) Через сколько часов после выхода грузовой машины они встретятся?

$$170 : 85 = 2 \text{ (ч)}.$$

5) В котором часу произойдет встреча машин?

$$11 \text{ ч} + 30 \text{ мин} + 2 \text{ ч} = 13 \text{ ч } 30 \text{ мин}.$$

Ответ. В 13 *ч* 30 *мин*.

Задача 2. Из двух пунктов, расстояние между которыми 37 *км*, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста. Первый проходил за час на 0,5 *км* больше второго. С какой скоростью

шел каждый турист, если через 2,5 *ч* после выхода расстояние между ними было 18,25 *км*?

Решение. Оба туриста прошли за 2,5 *ч* расстояние: 37—18,25= = 18,75 (*км*). За час они прошли 18,75 : 2,5 = 7,5 (*км*). Если бы скорость первого туриста была такая же, как и второго, они за час прошли бы 7,5 — 0,5 = 7 (*км*). Тогда второй турист за час проходил 7 : 2 = 3,5 (*км*), а первый — 3,5 + 0,5 = 4 (*км*).

Ответ. 4 *км* и 3,5 *км*.

б) Движение в одном направлении. Задача 3. Из пункта *A* выехал велосипедист и едет по направлению пункта *B* со средней скоростью 12 *км/ч*. Через 2 *ч* из этого же пункта отправился в том же направлении второй велосипедист со скоростью 18 *км/ч*. Через сколько часов и на каком расстоянии от *A* второй велосипедист догонит первого?

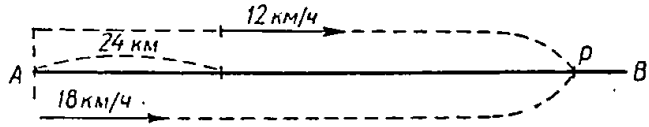


Рис. 14.

Решение (рис. 14). 1) Какое расстояние проходит первый велосипедист до выхода второго?

$$12 \cdot 2 = 24 \text{ (км)}.$$

2) На сколько километров больше проходит в час второй велосипедист, чем первый?

$$18 - 12 = 6 \text{ (км)}.$$

3) Через сколько часов после своего выхода второй велосипедист догонит первого?

$$24 \text{ км} : 6 \text{ км} = 4 \text{ (ч)}.$$

4) На каком расстоянии от *A* второй велосипедист догонит первого?

$$18 \times 4 = 72 \text{ (км)}.$$

Ответ. 4 *ч*, 72 *км*.

Задача 4. Мотоциклист, отправляясь в экскурсию, рассчитал, что если он будет проезжать по 20 *км/ч*, то приедет на место на 15 *мин* раньше, чем если поедет со скоростью 18 *км/ч*. Какое расстояние он должен проехать?

Р е ш е н и е. 1) Сколько километров проехал бы мотоциклист за 15 *мин* со скоростью 20 *км/ч*?

$$20 \cdot \frac{1}{4} = 5 \ (км).$$

2) На сколько километров больше проезжал бы мотоциклист за один час в первом случае, чем во втором?

$$20 - 18 = 2 \ (км).$$

3) За какое время мотоциклист пройдет все расстояние со скоростью 18 *км/ч*?

$$5 : 2 = 2{,}5 \ (ч).$$

4) Какое расстояние он должен проехать?

$$18 \cdot 2{,}5 = 45 \ (км).$$

О т в е т. 45 *км*.

III. АЛГЕБРА

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ АЛГЕБРЫ

Первые алгебраические задачи были поставлены и решены еще математиками древнего Египта и Вавилона. Папирус Ахмеса, относящийся к XVIII в. до н. э., содержит решение одиннадцати задач, приводящих к уравнениям с одним неизвестным. Значительно более глубокими знаниями обладали вавилоняне. До нашего времени сохранились тексты с решением системы двух уравнений с двумя неизвестными, квадратных и кубических уравнений, систем квадратных уравнений с двумя и с тремя неизвестными.

В древней Греции алгеброй занимались очень мало. Однако замечательный труд Диофанта Александрийского, написанный около 250 г. н. э., является доказательством того, что в древней Греции уже тогда существовала алгебра как наука, связанная, очевидно, с вавилонской математикой. Этот труд, носивший название «Арифметика», содержал решения задач, приводимых к уравнениям первой и второй степени и к неопределенным уравнениям. Все рассуждения Диофанта — чисто аналитического типа, но при решении каждой задачи он пользовался специальным способом: общих способов решений он не знал. Диофант не знал также отрицательных чисел, а при решении квадратного уравнения давал только положительный корень в качестве ответа. В своих алгебраических рассуждениях он пользовался некоторой символикой.

В истории математики, и в частности алгебры, различают три способа изложения — риторический, синкопированный и символический. *Риторическим* способом называется такой, когда все предложения записываются словами, символика отсутствует полностью. Этим способом изложения пользовалось большинство математиков вплоть до нового времени.

Синкопированный способ также характеризуется словесной записью математических выражений, однако для часто встречающихся действий и понятий применяется символика. Таким способом выполнен трактат Диофанта, которым вплоть до середины XVII в. пользовались западноевропейские алгебраисты.

Символический способ изложения, при котором математические выражения полностью записываются математическими символами, впервые в Европе был разработан французским математиком Виетом (1540—1603) и применяется со второй половины XVII в. Однако задолго до этого времени он уже применялся индийскими математиками.

Индийцы внесли в алгебру значительный вклад. Во II в. н. э. они пользовались иррациональными числами. В VII в. математик Брахмагупта уже полностью владеет теорией уравнений первой и второй степеней с одним неизвестным. Он пользуется также и понятием отрицательного числа. К XII в. относятся два трактата математика Бхаскары,— «Лилавати» и «Биджаганита». В последнем Бхаскара занимается решением квадратных уравнений, причем рассматривает оба корня, считая, однако, второй корень ненужным.

Некоторыми познаниями в алгебре обладали также математики древнего и средневекового Китая. Последняя часть «Математики в девяти книгах», написанной во II—III вв. н. э., посвящена применению алгебры к некоторым задачам геометрии. В XIII в. выдающийся китайский математик Цинь Цзю-Шао написал трактат «Девять отделов искусства счета», в котором он дает численные решения уравнений вплоть до четвертой степени. Это было наивысшим достижением китайцев в области алгебры; дальнейшее развитие математики в Китае последовало лишь в XIX в., после овладения европейскими методами исследования.

Начиная с IX в., алгеброй начали заниматься ученые ряда стран, входивших тогда в состав Арабского халифата. Они пользовались поэтому для своих сочинений арабским языком. Сирийскими, египетскими, иракскими и иранскими учеными были переведены на арабский язык, тщательно изучены и прокомментированы сочинения греческих математиков. Особенно значительный вклад принадлежит среднеазиатским ученым, которые, кроме греческой математики, изучили и индийскую, чем облегчили свои дальнейшие исследования.

Великий хорезмский математик Мухаммед ибн Муса написал трактат под названием «Книга восстановления и противопоставления».

«Восстановлением» Мухаммед называет перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, где оно становится слагаемым; «противопоставлением» — собирание неизвестных в одну сторону уравнения, а известных — в другую сторону. «Восстановление» по-арабски называется «ал-джебр». Отсюда и произошло слово «алгебра». В этом трактате Мухаммед дает учение об уравнениях первой и второй степеней, рассматривает применение алгебры к геометрии, а также к ряду вопросов, связанных с наследованием и делением имущества по сложным законам мусульманского права.

Значение Мухаммеда в истории науки велико. В сущности, он подытожил и свел воедино знания греков, индийцев и среднеазиатских народов по арифметике и алгебре.

Знаменитый таджикский поэт и ученый Омар Хайям (1040—1123) написал около 1070 г. трактат по алгебре, содержащий решение уравнений первой, второй и третьей степеней, а также некоторых специальных видов уравнений методом геометрических построений.

Много алгебраических задач было решено среднеазиатскими и арабскими учеными в связи с развитием астрономии и геометрии. Так, астроном Улуг-Бек (1394—1449) разработал численное решение кубических уравнений типа

$$x^3 + ax + b = 0,$$

необходимое для составления тригонометрических таблиц. Его современник ал-Каши разработал правило извлечения корней любой степени из целых чисел. Ал-Каши принадлежит также первое в истории науки применение правила возведения двучлена в любую степень («бином Ньютона»).

В Западной Европе алгебра начала развиваться, начиная с XIII в. В 1202 г. Леонардо Фибоначчи (Леонардо Пизанский) написал «Книгу об абаке», энциклопедическое сочинение, в котором свел знания своего времени в области арифметики и алгебры, в значительной степени заимствованные у восточных математиков. Как это сочинение, так и его прообразы — труды среднеазиатских и восточных ученых — написаны чисто риторическим способом и совершенно не содержали символики.

К самостоятельным достижениям Леонардо Фибоначчи относится приближенное алгебраическое решение кубического уравнения.

Точное алгебраическое решение этого уравнения было уже результатом трудов математиков эпохи Возрождения. В сущности, нахождение этого решения явилось одним из тех шагов, которые продвигают науку вперед и дают ей импульс для дальнейшего развития. Поэтому нахождение решения уравнения третьей степени явилось одним из крупнейших достижений математиков XVI в. В 1541 г. итальянский ученый Н. Тарталья нашел общее решение кубического уравнения, но опубликовал его другой итальянский ученый Джеронимо Кардано (1501—1576) в своей книге «Великое искусство». Там же Кардано привел и решение уравнений четвертой степени, найденное его учеником Феррари.

В течение следующих трех веков математики безуспешно искали алгебраические решения уравнений выше четвертой степени и только знаменитый норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802—1829) доказал, что общее алгебраическое уравнение выше четвертой степени не разрешимо в радикалах.

В своем труде Кардано указал также, что уравнение третьей степени имеет три корня. Правда, он не дал общего теоретического вывода этого положения, а привел его лишь в нескольких частных случаях. Он впервые решает задачу с комплексными числами: делит

10 на две части, произведение которых равно 40, и в результате получает $5+\sqrt{-15}$; $5-\sqrt{-15}$. Перемножив эти числа, он получает: $25+15=40$.

Наибольшего развития алгебра как наука достигла в XVI в. во Франции. Труд Франсуа Виета «Введение в аналитическое искусство», опубликованный в 1591 г., был первой из работ в области алгебры, написанной полностью в символической форме. Виет усовершенствовал методы алгебры и тригонометрии и весьма подробно и систематически изложил применение алгебры к геометрии.

При решении уравнений третьей и четвертой степеней он пользовался методом приведения. Однако все корни, кроме положительных, отвергал.

В 1629 г. Жирар (1590—1633) опубликовал свой труд под названием «Новые изобретения в алгебре», где оценил пользу отрицательных корней и установил, что каждое уравнение имеет столько корней, сколько единиц содержится в его показателе степени.

До XVII в. европейские математики, за исключением Жирара, не признавали отрицательных чисел, пока знаменитый французский геометр Рене Декарт (1596—1650) не дал геометрического истолкования их на числовой оси. Однако и после Декарта встречаются неправильные взгляды на отрицательные числа; только с середины XIX в. в учебниках для средней школы отрицательные числа излагаются систематически и дается их правильное истолкование.

Декарт систематизировал также символическую запись алгебраических выражений.

В 1614 г. шотландец Джон Непер (1550—1617) опубликовал теорию изобретенных им таблиц логарифмов. Одновременно с Непером и совершенно независимо от него швейцарец Юст Бюрги составил свои таблицы антилогарифмов — «Арифметические и геометрические таблицы прогрессий», но опубликовал их только в 1620 г. Несколько позже теорию логарифмов развил Бриггс (1556—1630). Знак «log» ввел И. Кеплер в 1624 г.

Значительные исследования в области алгебры принадлежали великому французскому ученому Пьеру Ферма (1601—1665), который разработал прием исключения одного неизвестного из двух уравнений одинаковой степени.

В 1707 г. была опубликована «Универсальная арифметика» И. Ньютона (1642—1727), в которой содержался ряд полученных им результатов из области алгебры. Частично эти результаты были опубликованы несколько раньше, в 1685 г., в «Алгебре» Валлиса (1616—1703). Ньютон усовершенствовал метод исключения Ферма, открыл теорему о биноме, хотя и не дал ее доказательства.

«Алгебра» Джона Валлиса долгое время служила наиболее полным руководством по этому предмету. Кроме глав из области теории и практики алгебры и арифметики, книга содержала также раздел

по истории алгебры. В частности, Валлис начал рассматривать степени с отрицательными показателями. Он ввел также знак бесконечности (∞).

Над доказательством биноминальной теоремы в течение XVIII в. работало много выдающихся математиков. Якоб Бернулли (1654—1705) доказал ее, пользуясь теорией сочетаний, для случая целых положительных показателей. Теорема для случая отрицательных и дробных показателей была доказана Леонардом Эйлером (1707—1783). Строгое доказательство было дано лишь в XIX в. Абелем.

На русском языке первой печатной книгой, содержавшей сведения по алгебре, была «Арифметика» Л. Ф. Магницкого. Таким образом, уже с самого начала XVIII в. сведения по алгебре входят в России в состав школьного преподавания.

Л. Эйлер написал «Полное введение в алгебру», которое было переведено на русский язык и издано в 1769 г. под названием «Универсальная арифметика». Книга представляла для своего времени наиболее полное и научно изложенное руководство по алгебре. Особенно хорошо была изложена теория логарифмов, совершенно переработанная Эйлером. Книга была дважды переиздана, а также неоднократно издавалась на немецком и французском языках.

Молодой французский математик Эварист Галуа (1811—1832), погибший в возрасте 21 года, положил основу новому учению в алгебре — теории групп, которое особенно развилось уже в наше время. Однако этот раздел выходит за пределы элементарной алгебры.

В русской школе отдельные сведения из области алгебры излагались в течение всего XVIII в. Сюда относилось учение об уравнениях первой и второй степеней, действия с буквенными выражениями, логарифмы, применение алгебры к решению геометрических задач. С конца XVIII в. под влиянием Эйлера и его учеников в русских учебных заведениях начинает читаться систематический курс алгебры.

Особенно много сделал для постановки преподавания алгебры академик С. Е. Гурьев (1764—1813).

В 1826—1839 гг. издал свою «Ручную математическую энциклопедию» профессор Московского университета Д. М. Перевощиков (1788—1880); третий том этой энциклопедии представлял собой учебник алгебры. Он был дважды переиздан; третье издание вышло в 1854 г. Учебники Д. М. Перевощикова явились значительным вкладом в дело математического образования в России.

Следует отметить, что вопросами преподавания элементарной математики в средней школе занимались в середине XIX в. такие выдающиеся математики, как Н. И. Лобачевский (1792—1856), М. В. Остроградский (1801—1861), В. Я. Буняковский (1804—1889), О. И. Сомов (1815—1876), П. Л. Чебышев (1821—1894) и другие. Лобачевским и Сомовым, в частности, были составлены учебники по элементарной алгебре для средней школы.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Рациональные числа

1. Положительные и отрицательные числа. По мере развития математики происходило обобщение понятия числа. Обнаружилось, что чисел, которые использует арифметика, недостаточно для решения многих теоретических и практических задач. Были введены новые — *отрицательные числа*. Для их обозначения используют знак минус, например: —2, —19, —0,7 и т. д.

Отрицательные числа бывают целые и дробные. Например, числа —4, —306 — целые отрицательные, а числа —0,7, —4,18, $-\frac{2}{3}$, $-5\frac{1}{2}$ — дробные отрицательные. Чтобы не смешивать с отрицательными числами те натуральные и дробные числа, которые рассматривались в арифметике, условились называть их *положительными*. Перед положительными числами иногда пишут знак плюс, но можно его и не писать. Например, числа $+7$ и 7 — одно и то же.

Число *нуль* не принадлежит ни к положительным, ни к отрицательным числам. Перед ним можно ставить и плюс, и минус; числа $+0$, -0 и 0 — обозначают одно и то же.

Целые положительные (т. е. натуральные), целые отрицательные числа и нуль все вместе называют *целыми числами*. Все целые числа и дробные числа (положительные и отрицательные) называют *рациональными числами*.

Примечание. Раньше рациональные числа называли относительными.

2. Числовая ось. Рациональные числа удобно изображать на прямой линии. Для этого достаточно взять на прямой какую-нибудь точку O (ее называют *начальной* или *нулевой*), в обе стороны от нее отложить равные отрезки и их концы обозначить числами, как показано на рис. 15. Тогда каждому рациональному числу на прямой

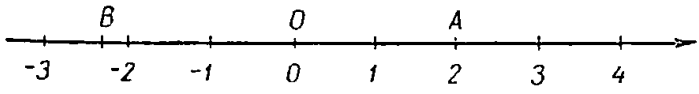


Рис. 15.

будет соответствовать определенная точка. Например, число 2 изображает точка A, число —2,3 — точка B.

Прямая, точки которой изображают числа, называется *числовой прямой* или *числовой осью*.

Каждому рациональному числу на числовой оси соответствует единственная точка.

Примечание. Однако не каждой точке числовой оси соответствует рациональное число (см. стр. 185).

Двум рациональным числам, которые отличаются только знаками, на числовой оси соответствуют точки, расположенные по обе стороны от нулевой точки и на одинаковых расстояниях от нее. Такие пары чисел называют *противоположными числами*. Например, число 9 противоположно числу —9 и наоборот.

Противоположными называют также знаки + и —.

3. **Абсолютная величина числа.** Два противоположных числа, например +7 и —7, отличаются знаками, но записываются одинаковыми цифрами. Говорят, что они имеют одинаковые *абсолютные величины*. Абсолютная величина каждого из них равна 7.

Абсолютной величиной положительного числа называется само это число, абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему число, абсолютной величиной числа 0 *называется само число* 0.

Обозначают абсолютную величину числа a знаком $|a|$.

Таким образом, $|a| = a$, если $a > 0$; $|a| = -a$, если $a < 0$; $|0| = 0$.

Например, $|-13| = 13$; $|4| = 4$; $|0| = 0$.

4. **Сравнение рациональных чисел.** Отрицательные числа сравнивают по величине как между собой, так и с положительными числами. Из двух рациональных чисел то больше, которому на числовой оси соответствует точка, расположенная правее.

Отсюда вытекают следующие положения:

а) *всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа;*

б) *всякое отрицательное число меньше нуля;*

в) *из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньшая.*

Например,

$$3 > 0;\ 1 > -5;\ -\frac{1}{2} < 0;\ -3 > -10;\ -4 < -1.$$

Равными считаются только такие числа, у которых и знаки, и абсолютные величины равны, например $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$.

§ 2. Действия с рациональными числами

Действия сложения и умножения рациональных чисел определяют; правила вычитания и деления выводят из правил сложения и умножения.

1. **Сложение.** а) *Чтобы сложить рациональные числа с одинаковыми знаками, складывают их абсолютные величины и перед суммой ставят их общий знак.*

Примеры. $(+8)+(+11)=19$; $(-7)+(-3)=-10$.

б) *Чтобы сложить два рациональных числа с разными знаками, необходимо из большей абсолютной величины вычесть меньшую абсолютную величину и поставить знак числа с большей абсолютной величиной.*

Примеры. $(+19)+(-7)=12$; $(-2{,}4)+15{,}8=13{,}4$.

в) *Сумма двух противоположных чисел равна нулю.*

Пример: $(-15)+(+15)+0$; $\left(-4\frac{3}{8}\right)+\left(+4\frac{3}{8}\right)=0$.

г) Если одно из двух слагаемых равно нулю, то сумма равна другому слагаемому: $a+0=0+a=a$.

Законы сложения положительных чисел справедливы для всех рациональных чисел.

Сложение нескольких чисел с разными знаками можно выполнить последовательно: сначала найти сумму первых двух слагаемых, к этой сумме прибавить третье и т. д. Однако удобней сложение выполнять по такому правилу: чтобы сложить несколько рациональных чисел с разными знаками, надо сложить отдельно все положительные и все отрицательные числа и полученные два числа сложить по правилу сложения чисел с разными знаками.

Примеры. $(+15)+(-4)+(-8)+(+9)+(-1)=(+24)+(-13)=+11$.

$$\left(-7\frac{1}{3}\right)+\left(+3\frac{5}{8}\right)+\left(-10\frac{1}{3}\right)+\left(+1\frac{3}{8}\right)=$$

$$=\left(-17\frac{2}{3}\right)+(+5)=-12\frac{2}{3}.$$

2. **Вычитание.** *Чтобы вычесть одно число из другого, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.*

Примеры. $(-3)-(+8)=(-3)+(-8)=-11$; $-7-(-4)=-7+(+4)=-3$.

Вычитание рациональных чисел заменяется сложением. Поэтому вычитание рациональных чисел всегда возможно.

3. **Алгебраическая сумма.** Так как вычитание рациональных чисел можно заменять сложением, то каждое выражение, состоящее из нескольких сложений и вычитаний, можно подать в виде суммы чисел с теми же абсолютными величинами. Поэтому на такие выражения можно смотреть как на суммы. Их называют *алгебраическими суммами.*

Примеры алгебраических сумм:

$$3+7-4,\quad (-2)+(-7)+(+8)-(-4),\quad a+b-c+d.$$

4. **Умножение.** *Чтобы перемножить два рациональных числа, надо перемножить их абсолютные величины и перед результатом поставить знак плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, или минус, если сомножители имеют разные знаки.*

Примеры. $(-2)\cdot(-3)=+6$; $(-0{,}5)\cdot(+2)=-1$;
$(+2)\cdot(+3)=+6$; $(+0{,}5)\cdot(-4)=-2$.

Если хоть один сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю, например $0\cdot(-5)=0$; $(+2{,}5)\cdot 0=0$.

Чтобы умножить несколько сомножителей с разными знаками, надо перемножить абсолютные величины чисел и определить знак произведения: если число отрицательных сомножителей четное, то произведение будет положительным, если число отрицательных сомножителей нечетное, то произведение будет отрицательным.

Примеры. $(-5)\cdot(+4)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(+10)=-1200$ (число отрицательных сомножителей нечетное — три).

$(+2{,}5)\cdot(-7{,}3)\cdot(+4)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot(-6)=+292$ (число отрицательных сомножителей четное — четыре).

Законы умножения положительных чисел справедливы для всех рациональных чисел.

5. **Возведение в степень.** Степень любого рационального числа с натуральным показателем определяется так же, как и степень положительного числа, т. е. представляет собой произведение нескольких равных сомножителей.

Четная степень отрицательного числа положительная, нечетная степень — отрицательная.

Примеры. $(+2{,}1)^2=+4{,}41$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$;
$(-0{,}03)^2=0{,}0009$.

6. **Деление.** *Частное от деления двух рациональных чисел с одинаковыми знаками равно частному их абсолютных величин, взятому со знаком плюс.*

Примеры. $(-16):(-4)=+4$; $(+28):(+4)=+7$.

Частное от деления двух рациональных чисел с противоположными знаками равно частному их абсолютных величин, взятому со знаком минус.

Примеры. $(-48):(+12)=-4$; $(+16{,}8):(-8)=-2{,}1$.

7. **Исторические сведения о развитии понятия отрицательного числа.** Впервые отрицательные числа появились у китайских математиков около начала нашего летосчисления. В IV—V вв. индийские

математики развили учение об отрицательных числах, а в VII в. Брахмагупта дал и истолкование действиям над отрицательными числами, называя положительные числа имуществом, а отрицательные — долгом: «Сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов — долг, сумма имущества и долга — их разность, или, если они равны, — нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля — имущество, двух нулей — нуль. Меньшее вычитается из большего, имущество из имущества, долг из долга, но если вычитается большее из меньшего, значение избытка меняется. Долг, будучи вычтен из нуля, делается имуществом, имущество превращается в долг».

Однако, несмотря на логичность и увязку с практикой, учение индийских ученых не было воспринято на Западе. Лука Пачиоли (1445—1514) пользуется отрицательными числами, но лишь в составе многочленов. Он пользуется правилом «минус на минус дает плюс» в применении к выражениям типа $(a - b) \times (a - b)$.

В большей степени пользуется отрицательными числами Кардано. М. Штифель, исходя из положения, что отрицательные числа «меньше, чем ничто», назвал их «нелепыми числами». Большинство европейских ученых придерживалось такого же взгляда и оперировало исключительно с положительными числами.

Декарт тоже называл отрицательные числа «ложными», однако он представлял их в виде отрезков, имеющих направление, противоположное отрезкам, соответствующим положительным числам.

Дальнейшее развитие теории отрицательных чисел в конце XVII и начале XVIII вв. связано было с открытием Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчислений. Развитие новых областей высшей математики потребовало нового освещения отрицательных величин и выяснения их роли. Это было сделано в трудах Ньютона и Эйлера. Однако и во второй половине XVIII в. многие математики, даже такие крупные ученые, как Даламбер и Карно, не признавали отрицательных чисел, считали их «ложными», недействительными. Они считали, что в математику не следует вводить отрицательных чисел, так как последние суть ничто иное, как вычитаемые положительные числа, а следовательно, и все действия должны сводиться исключительно к действиям с положительными числами.

Только в XIX в. отрицательные числа полностью вошли в обиход алгебры.

§ 3. Алгебраические выражения

1. Употребление букв. В алгебре для обозначения чисел, кроме цифр, пользуются буквами, чаще всего латинского алфавита (см. стр. 9).

Буквы употребляют:

1) для обозначения неизвестных чисел, например в упражнении «Определить x, если $x + 0{,}9 = 2{,}7$»;

2) для обозначения произвольных чисел; например, когда хотят сказать, что переместительный закон сложения имеет место для любых рациональных чисел, пишут: какие бы ни были рациональные числа a и b, $a + b = b + a$.

Обычно неизвестные числа обозначают последними буквами латинского алфавита (x, y, z), а известные — первыми (a, b, c, d и т. д.). Целые числа чаще всего обозначают буквами m, n, k, l и др. Однако этих соглашений не всегда придерживаются: могут быть неизвестными и числа, обозначенные буквами a, b, n, и известными считаться x, y, z и т. д.

2. Алгебраические выражения. Так как под буквами в алгебре подразумевают числа, то с ними оперируют, как с числами, обозначенными цифрами. Например, если требуется сложить a и b, пишут $a + b$. Эту запись и называют суммой чисел a и b.

Примечание. Перед множителями, выраженными буквами, знак умножения не ставят, а только подразумевают. Например, вместо $a \cdot b \cdot c$, $4 \cdot x$ пишут abc, $4x$. Однако перед множителями, обозначенными цифрами, знак умножения пишут обязательно. Например, вместо $9 \cdot 3$, $3 \cdot \frac{1}{2}$ писать 93, $3\frac{1}{2}$ нельзя.

Совокупность чисел, обозначенных буквами или цифрами и соединенных знаками действий, называют *алгебраическим выражением*.

Для краткости вместо «алгебраическое выражение» говорят просто «выражение».

Примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+3}{b+4};\quad 3m^2n;\quad 9(p^2+q^2);\quad a;\quad (13+18)7;\quad 3{,}7.$$

Алгебраическое выражение может состоять из одной буквы, может совсем не содержать чисел, обозначенных буквами. В последнем случае (см. два последних примера) их называют также *арифметическими выражениями*.

3. Числовое значение алгебраического выражения. *Числовым значением* алгебраического выражения при данном значении входящих в него букв называется число, полученное в результате подстановки вместо букв соответствующих чисел и выполнения указанных действий.

Пример. Определить числовое значение выражения $3a + 5$ при $a = 5{,}7$.

Решение. Если $a = 5{,}7$, то

$$3a + 5 = 3 \cdot 5{,}7 + 5 = 22{,}1.$$

Ответ. При $a = 5{,}7$ числовое значение данного выражения равно 22,1.

Пример. Определить числовое значение выражения $\frac{a}{2n+5a}$ при $a=1$ и $n=-2{,}5$.

Решение. Если $a=1$, $n=-2{,}5$, то

$$\frac{a}{2n+5a}=\frac{1}{2\cdot(-2{,}5)+5\cdot 1}=\frac{1}{0}.$$

Однако на 0 делить нельзя, следовательно, при данных значениях букв данное алгебраическое выражение не имеет числового значения. Говорят также, что при $a=1$ и $n=-2{,}5$ это выражение лишено смысла или что эти значения *недопустимы* для данного выражения.

Числовые значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, не лишая его смысла, называются *допустимыми значениями* для этих букв.

4. Одночлен и многочлен. *Алгебраические выражения, составленные из цифр и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с натуральным показателем, называются рациональными алгебраическими выражениями.*

Примеры. $a-b$; a^2b; $\frac{x}{y}$; $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$; $a+\frac{2}{b}$.

Рациональное алгебраическое выражение называется *целым*, если оно не содержит деления на буквенное выражение.

Пример. $3a^2+\frac{1}{2}b$; $x-y$; $\frac{5x-4y}{8}$; a^2b.

Из целых выражений наиболее простыми являются одночлены. Алгебраическое выражение, которое содержит только *действия умножения и возведения в степень, называется одночленом.*

Примеры. $7ab^2$; $-\frac{2}{5}b$; $\frac{4}{5}x^2y^2$; $-0{,}2^3$; c.

Эти одночлены записаны в простейшем (каноническом) виде.

Алгебраическая сумма нескольких одночленов *называется многочленом*, или *полиномом*.

Пример. $2a+7b-c$; $a^3-b^3-\frac{2}{3}c^2$; x^2+x-5.

Каждый одночлен, входящий в состав многочлена, называется его *членом*. Многочлен, состоящий из двух членов, называется также *двучленом*, или *биномом* (например, $2a-b$); многочлен, состоящий из трех членов, называется *трехчленом* (например, $3a-2b+8$) и т. д.

Одночлен принято также считать многочленом.

5. Расположенные многочлены. Пусть дано многочлен, содержащий только одну букву в различных степенях. Пользуясь переместительным законом сложения, мы можем переставить его члены так, чтобы они были расположены или по возрастающим, или по убывающим степеням этой буквы.

Пример. Многочлен $-15x^2+7x^4-8x+3-5x^3$ расположить: *а*) по возрастающим степеням x; *б*) по убывающим степеням x.

Решение. *а*) $3-8x-15x^2-5x^3+7x^4$ (по возрастающим степеням); *б*) $7x^4-5x^3-15x^2-8x+3$ (по убывающим степеням).

Если многочлен содержит две или несколько букв, то выбирают одну из них, которую называют главной, и располагают многочлен по степеням этой главной буквы. Например, выражение $3x^3-2ax^2+a^4x-5a^2$ является многочленом, расположенным по убывающим степеням буквы x. Первый член расположенного многочлена, содержащий главную букву в наивысшей степени, называется старшим, а последний — низшим членом этого многочлена. Степень старшего члена называется *степенью* и самого многочлена. Так, в нашем случае $3x^3$ — старший член, $-5a^2$ — низший член, 3 — будет степенью старшего члена и степенью самого многочлена.

6. **Коэффициент.** *Числовой множитель*, стоящий впереди буквенных множителей, называется *коэффициентом*.

Если выражение содержит только буквенные множители, то его коэффициент равен единице, например, вместо $1c$ пишут просто c, вместо $1ab$ пишут ab. Коэффициент может быть целым числом, например в выражении $5cd$, а также дробным, например в выражении $\frac{5}{6}ab$. *Если коэффициент — натуральное число, то он показывает,* сколько раз стоящее за ним выражение берется слагаемым, например $5cd=cd+cd+cd+cd+cd$. Если же коэффициент — дробное положительное число, то он показывает, какую дробь надо взять от значения стоящего за ним выражения. Например, в выражении $\frac{5}{6}ab$ коэффициент $\frac{5}{6}$ означает, что при любых значениях a и b надо взять $\frac{5}{6}$ от их произведения.

С помощью коэффициентов можно короче записать многие выражения, содержащие одинаковые буквы, соединенные знаками + и —, например:

$$c+c+c+c+c=5c;$$
$$x+x-y-y-y=2x-3y;$$
$$\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}=\frac{4z}{3};$$
$$\frac{x+x+x+x+x+x+x}{y+y+y}=\frac{7x}{3y}.$$

Примечание. В дальнейшем понятие коэффициента обобщается, даже буквенные множители можно рассматривать как коэффициенты. Например, в выражении $2abx$ коэффициентом при x есть $2ab$.

7. Порядок действий. В алгебре сохраняются правила о порядке выполнения действий, которые приняты в арифметике (если не учитывать одного исключения, рассмотренного на стр. 59). В выражениях без скобок, содержащих действия разных ступеней, сначала надо выполнять возведение в степень, затем умножение, деление и, наконец, сложение и вычитание. Если в выражении есть скобки, то действия над числами, заключенными в скобки, выполняются первыми.

Пример. Найти числовое значение выражения

$$a + \frac{b(b-2a)}{a} : ab^2$$

при $a = -1$, $b = 0{,}5$.

Решение. Если $a = -1$, $b = 0{,}5$, то

$$a + \frac{b(b-2a)}{a} : ab^2 = -1 + \frac{0{,}5\,[0{,}5 - 2 \cdot (-1)]}{-1} : (-1) \cdot 0{,}5^2 =$$

$$= -1 + \frac{0{,}5\,(0{,}5+2)}{-1} : (-1) \cdot 0{,}25 = -1 + \frac{0{,}5 \cdot 2{,}5}{-1} : (-0{,}25) =$$

$$= -1 - 1{,}25 : (-0{,}25) = -1 + 5 = 4.$$

§ 4. Тождественные преобразования целых выражений

1. Тождественные выражения и преобразования. Два выражения называются *тождественными*, если они имеют одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв.

Пример. Выражения $3(a-2)+6$ и $3a$ тождественны:

при $a = 1$ $3(a-2)+6 = 3$ и $3a = 3$,

при $a = 2$ $3(a-2)+6 = 6$ и $3a = 6$ и т. д.

Два тождественных выражения, соединенные знаком равенства, составляют *тождество*. Можно сказать и так:

равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв, называется тождеством.

Примеры. $3(a-2)+6 = 3a$;

$x + 2x + 5x = 8x$ — тождества.

Тождествами являются также все равенства, выражающие законы сложения и умножения:

$$a + b = b + a,$$
$$a + b + c = a + (b + c),$$
$$ab = ba,$$
$$abc = a(bc),$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется *тождественным преобразованием* этого выражения.

Дальше будут приведены примеры простейших тождественных преобразований целых алгебраических выражений.

2. **Приведение подобных членов.** Два одночлена *равны*, если у них равны коэффициенты и они составлены из одинаковых букв с соответственно равными показателями. Одночлены называются *подобными*, если они равны или отличаются только коэффициентами.

Примеры. Одночлены $2a^2b^3$ и $\frac{6}{3}a^2b^3$ равны; одночлены $2a^3$, $-3a^3$ и $\frac{1}{2}a^3$ подобны.

Замена алгебраической суммы подобных членов одним членом, тождественным этой сумме, называется *приведением подобных членов. Чтобы привести подобные члены, надо сложить их коэффициенты и полученную сумму записать коэффициентом того же буквенного выражения.*

Примеры. $3a^2b - a^2b + 7{,}4a^2b = (3 - 1 + 7{,}4)a^2b = 9{,}4a^2b$;
$14m^2n - 27m^3n^2 + 0{,}7m^2n + 2m^3n^2 - 0{,}5m^3n^2 - 6m^2n = 8{,}7m^2n - 25{,}5m^3n^2$.

3. **Раскрытие скобок и заключение в скобки.** Раскрыть в алгебраическом выражении скобки, значит заменить его тождественным ему выражением, не содержащим скобок. Правила раскрытия скобок следуют из свойств сложения и вычитания:

$$a + (b + c) = a + b + c,$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Формулируют эти правила так:

а) *чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с их знаками;*

б) *чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать без скобок все члены, стоящие в скобках, с противоположными знаками.*

Примеры. $9a^2 + [7a^2 - 2a - (a^2 - 3a)] = 9a^2 + (7a^2 - 2a - a^2 + 3a) = 9a^2 + 7a^2 - 2a - a^2 + 3a = 15a^2 + a$;

$(3m + 5n) - \{9m - [6m + 2n - (12n + 10m) - m - (7m - 4n)]\} = 3m + 5n - [9m - (6m + 2n - 12n - 10m) - m - 7m + 4n] = 3m + 5n - (9m - 6m - 2n + 12n + 10m - m - 7m + 4n) = 3m + 5n - 9m + 6m + 2n - 12n - 10m + m + 7m - 4n = -2m - 9n$.

При заключении в скобки пользуются такими правилами:

а) *чтобы заключить в скобки многочлен со знаком плюс перед скобками, надо записать в скобках все члены многочлена с их знаками;*

б) *чтобы заключить в скобки многочлен со знаком минус перед скобками, надо записать в скобках все члены многочлена с противоположными знаками.*

Примеры. В выражении $2x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - y^3$ заключить в скобки крайние члены со знаком плюс перед скобками, а средние члены — со знаком минус.

Решение.

$$2x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - y^3 = (2x^3 - y^3) - (4xy^2 - 5x^2y).$$

В выражении $x^2 - y^2 - (y - x)$ изменить перед скобками знак на противоположный, не изменяя величины выражения.

Решение.

$$x^2 - y^2 - (y - x) = x^2 - y^2 + (x - y).$$

§ 5. Действия над целыми алгебраическими выражениями

1. Сложение одночленов и многочленов. *Чтобы сложить одночлены, достаточно записать их один за другим с их знаками и привести подобные члены, если они есть.*

Пример. $(-0{,}2xy) + (3{,}7x^2) + (-3{,}5xy) + (-6{,}8x^2) = -0{,}2xy + 3{,}7x^2 - 3{,}5xy - 6{,}8x^2 = -3{,}7xy - 3{,}1x^2$.

Чтобы сложить многочлены, надо записать последовательно все их члены с их знаками и привести подобные члены, если они есть.

Пример. $(12a + 7b - c) + (c - 7b + 8a) = 12a + 7b - c + c - 7b + 8a = 20a$.

Сложение расположенных многочленов выполняют так: подписывают многочлены так, чтобы подобные члены находились один под другим; после этого сразу приводят подобные члены и записывают окончательный результат.

Пример. Сложить многочлены: $3x^4 + 7x^3y - x^2y^2 - 5xy^3$; $-7x^4 - 5x^3y + 8x^2y^2 + 10xy^3$; $4x^4 + 10x^3y - 2x^2y^2 - 7xy^3$.

Решение.

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 7x^3y - x^2y^2 - 5xy^3 \\ +\ -7x^4 - 5x^3y + 8x^2y^2 + 10xy^3 \\ 4x^4 + 10x^3y - 2x^2y^2 - 7xy^3 \\ \hline 12x^3y + 5x^2y^2 - 2xy^3. \end{array}$$

2. Вычитание одночленов и многочленов. *Чтобы вычесть одночлен, достаточно прибавить его к уменьшаемому с противоположным знаком и привести подобные члены, если они есть.*

Примеры. $10a^3 - (+7a^3) = 10a^3 - 7a^3 = 3a^3$;
$-0{,}2m^2n - (+7{,}3mn) = -0{,}2m^2n - 7{,}3mn$.

Чтобы вычесть многочлен, надо записать после уменьшаемого все его члены с противоположными знаками и привести подобные члены, если они есть.

Пример. $(5x^2 - 3xy + y^2) - (6x^2 - 8xy + y^3) = 5x^2 - 3xy + y^2 - 6x^2 + 8xy - y^3 = -x^2 + 5xy + y^2 - y^3$.

Вычитание расположенных многочленов можно выполнять так: у вычитаемого многочлена меняют знаки всех членов на противоположные, подписывают его под уменьшаемым так же, как и при сложении, и приводят подобные члены.

Пример. Выполнить вычитание в столбик: $(8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18) - (5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 7)$.

Решение.
$$\begin{array}{r} 8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18 \\ + \quad -5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 4x + 7 \\ \hline 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 11. \end{array}$$

3. Умножение одночленов и многочленов. *Чтобы перемножить одночлены, надо перемножить их коэффициенты и к произведению приписать множителем каждую букву из перемножаемых одночленов с показателем, равным сумме показателей этой буквы в сомножителях.* Если буква входит только в один из сомножителей, то ее записывают в произведение с тем же показателем.

Примеры. $\left(\frac{2}{7} x^3y^2z\right) \cdot 21xy = -6x^4y^3z;$

$(-8x^{n+1}) \cdot (-0{,}5x^3y) = 4x^{n+4}y.$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Примеры. $(5m^2 - 10mn - 4n^2) \cdot \left(-\frac{1}{2} mn\right) = -2\frac{1}{2} m^3n + 5m^2n^2 + 2mn^3;$

$$1\frac{1}{3} ab \cdot \left(\frac{3}{4} a^2b - \frac{3}{2} ab^2 - \frac{5}{6} b^3\right) = a^3b^2 - 2a^2b^3 - 1\frac{1}{9} ab^4.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Примеры. $(4z^2 - 1) \cdot (z^2 + 5) = 4z^4 + 20z^2 - z^2 - 5 = 4z^4 + 19z^2 - 5;$

$(x^2 + 3x + 2) \cdot (x - 5) = x^3 - 5x^2 + 3x^2 - 15x + 2x - 10 = x^3 - 2x^2 - 13x - 10.$

Умножение расположенных многочленов покажем на примере:

$$\begin{array}{r} \times \quad 3x^2 - 2ax + 5a^2 \\ \quad -x^2 + 3ax + 4a^2 \\ \hline -3x^4 + 2ax^3 - 5a^2x^2 \\ + \qquad 9ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x \\ \qquad\qquad 12a^2x^2 - 8a^3x + 20a^4 \\ \hline -3x^4 + 11ax^3 + a^2x^2 + 7a^3x + 20a^4. \end{array}$$

При умножении многочленов их располагают по убывающим степеням одной из букв. Умножение выполняют в следующем порядке. Все члены множимого умножают на первый член множителя и результат записывают в строку под чертой. Затем все члены множимого умножают на второй член множителя и результат записывают во второй строке так, чтобы подобные члены оказались друг под другом. Так же записывают произведения всех членов множимого на третий член множителя и так далее до конца. Подобные члены приводят и окончательный результат записывают внизу под чертой.

4. **Возведение в степень одночленов.** *Чтобы возвести одну степень в другую, надо основание возвести в степень, равную произведению показателей степеней.*

Примеры. $(a^3)^2 = a^6$; $(x^2)^4 = x^8$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить.

Примеры. $(2x^2y^3z)^4 = 16x^8y^{12}z^4$; $[-(-a)^2]^3 = [-a^2]^3 = -a^6$.

5. **Деление одночленов.** *При делении степеней одного и того же основания из показателя делимого вычитается показатель делителя, а основание остается прежним.*

Примеры. $x^6 : x^2 = x^4$; $a^m : a^n = a^{m-n}$ (при $m > n$).

Примечание. Если m равно n, то в этом случае делитель и делимое равны, значит, частное равно единице:

$$a^m : a^m = 1.$$

Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя и к полученному частному приписать множителями каждую букву делимого с показателем, равным разности показателей этой буквы в делимом и делителе.

Примеры. $(-15ax^2) : 7{,}5x = -2ax$;

$$30m^4x^5 : (-18m^4x^2) = -1\frac{2}{3}x^3.$$

Деление одночленов нацело невыполнимо, если показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом или если делитель содержит букву, которой нет в делимом.

6. **Деление многочлена на одночлен.** *Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.*

Примеры. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3 + 1\frac{1}{5}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3 = 1\frac{1}{4}a^5 + 2a^2x - 1\frac{1}{2}x^2$;

$[5(a+b)^4 - 10(a+b)^3 - 15(a+b)^2] : 5(a+b)^2 = (a+b)^2 - 2(a+b) - 3$.

7. Деление многочлена на многочлен. Рассмотрим деление многочленов на примере, когда оба многочлена зависят от одной буквы.

Пусть надо разделить многочлен $6x^4 - 11x^2 + 5x^3 + 9x - 5$ на многочлен $3x^2 + 4x - 5$. Для этого располагают многочлены по убывающим степеням букв x. Затем выполняют деление в следующем порядке:

а) делят первый член делимого на первый член делителя и получают первый член частного;

б) умножают делитель на первый член частного и произведение вычитают из делимого. Получают первый остаток;

в) делят первый (старший) член остатка на первый член делителя, получают второй член частного и так делят до тех пор, пока деление не окончится или пока не получится остаток, старший член которого не делится на старший член делителя.

Записывают так:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 & 3x^2 + 4x - 5 \\ \underline{-\,6x^4 + 8x^3 - 10x^2} & \underline{} \\ -3x^3 - x^2 + 9x & 2x^2 - x + 1 \\ \underline{-\,-3x^3 - 4x^2 + 5x} & \\ 3x^2 + 4x - 5 & \\ \underline{-\,3x^2 + 4x - 5} & \\ 0 & \end{array}$$

Если многочлены зависят от двух или нескольких букв, выбирают какую-нибудь букву главной и располагают многочлены по убывающим степеням этой буквы. Тогда остальные буквы рассматривают как коэффициенты, и деление таких многочленов выполняют так же, как и в первом случае.

Пример.

$$\begin{array}{r|l} a^6 + 2a^3x + x^2 & a^3 + x \\ \underline{-\,a^6 + a^3x} & \underline{} \\ a^3x + x^2 & a^3 + x \\ \underline{-\,a^3x + x^2} & \\ 0 & \end{array}$$

или

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2xa^3 + a^6 & x + a^3 \\ \underline{-\,x^2 + xa^3} & \underline{} \\ xa^3 + a^6 & x + a^3 \\ \underline{-\,xa^3 + a^6} & \\ 0 & \end{array}$$

Деление многочленов не всегда выполняется нацело. В большинстве случаев при делении многочлена на многочлен получается *остаток*.

Пример.

$$\begin{array}{r|l}
a^6-2a^5-a^4+2a^3-a+1 & a^3-2a^2+3a-1 \\
\underline{a^6-2a^5+3a^4-a^3} & \overline{a^3-4a-5} \\
-4a^4+3a^3-a & \\
\underline{-4a^4+8a^3-12a^2+4a} & \\
-5a^3+12a^2-5a+1 & \\
\underline{-5a^3+10a^2-15a+5} & \\
2a^2+10a-4. &
\end{array}$$

Здесь многочлен $2a^2+10a-4$ уже не делится на a^3-2a^2+3a-1, следовательно, в результате деления получено частное a^3-4a-5 и остаток $2a^2+10a-4$.

Между делимым A, делителем B, частным Q и остатком R существует следующая зависимость:

$$A=BQ+R.$$

В рассмотренном примере имеем:

$$a^6-2a^5-a^4+2a^3-a+1=(a^3-2a^2+3a-1)(a^3-4a-5)+2a^2+10a-4.$$

Примечание. В случае деления многочленов от нескольких букв частное и остаток определяются не однозначно в зависимости от того, какую букву выбрано главной. Например,

$$\begin{array}{r|l}
a^2+ab+b^2 & a+b \\
\underline{a^2+ab} & \overline{a} \\
b^2 &
\end{array}, \text{ но } \begin{array}{r|l}
b^2+ba+a^2 & b+a \\
\underline{b^2+ba} & \overline{b} \\
a^2 &
\end{array}.$$

Здесь делимое и делитель в обоих случаях одинаковы, но частные и остатки — разные.

§ 6. Формулы сокращенного умножения

1. **Произведение суммы двух чисел на их разность.** Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Эту формулу можно представить геометрически (рис. 16). Площадь заштрихованной части на верхнем рисунке равна a^2-b^2, на нижнем она равна $(a+b)(a-b)$.

Примеры.

$$(7x+2y^3)(7x-2y^3)=49x^2-4y^6;$$

$$\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{8}y\right)\left(\frac{7}{8}y-\frac{2}{3}x\right)=\frac{49}{64}y^2-\frac{4}{9}x^2.$$

2. Квадрат суммы. *Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

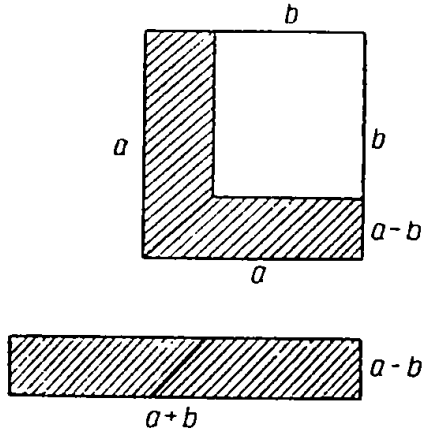


Рис. 16.

Примеры.

$$\left(\frac{2}{5}xy + 10x^2\right)^2 = \left(\frac{2}{5}xy\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}xy \cdot 10x^2 + (10x^2)^2 =$$

$$= \frac{4}{25}x^2y^2 + 8x^3y + 100x^4;$$

$$\left(\frac{5}{6}m^2n^3 + \frac{3}{5}mn\right)^2 = \left(\frac{5}{6}m^2n^3\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}m^2n^3 \cdot \frac{3}{5}mn + \left(\frac{3}{5}mn\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{36}m^4n^6 + m^3n^4 + \frac{9}{25}m^2n^2.$$

Геометрически формулу квадрата суммы двух чисел можно изобразить, как показано на рис. 17.

Квадрат суммы нескольких слагаемых можно определить по формуле

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 +$$
$$+ 2a_1a_2 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с суммой всевозможных удвоенных произведений его членов, взятых по два.

Пример. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ (рис. 18).

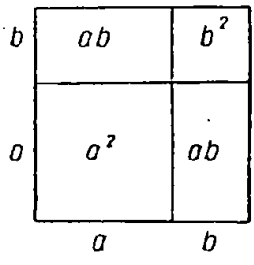


Рис. 17.

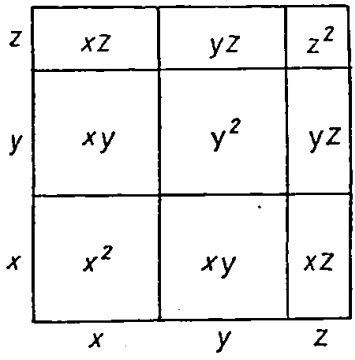


Рис. 18.

3. Квадрат разности. *Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Примеры.

$$(x^2 - 3a)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(3a) + (3a)^2 = x^4 - 6x^2a + 9a^2,$$
$$(1 - 0{,}5c) = 1 - c + 0{,}25c^2.$$

4. Куб суммы и разности. *Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, плюс куб второго числа:*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого на квадрат второго, минус куб второго числа:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Примеры.

$$(a^2 + 4b^3)^3 = (a^2)^3 + 3(a^2)^2 \cdot 4b^3 + 3a^2 \cdot (4b^3)^2 + (4b^3)^3 =$$
$$= a^6 + 12a^4b^3 + 48a^2b^6 + 64b^9;$$
$$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 5b + 3 \cdot 2a(5b)^2 - (5b)^3 =$$
$$= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3.$$

5. Сумма и разность кубов. *Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат их разности:*

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Примечание. *Неполным квадратом разности* чисел a и b называют выражение $a^2 - ab + b^2$. От полного квадрата разности $a^2 - 2ab + b^2$ оно отличается только средним коэффициентом. Выражение $a^2 + ab + b^2$ называют *неполным квадратом суммы.*

Если приведенную выше формулу прочитать справа налево, получим:

произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.

Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат их суммы:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Эта формула читается и справа налево:

произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.

Примеры. $\frac{27}{512}x^3 + \frac{8}{729}y^9 = \left(\frac{3}{8}x\right)^3 + \left(\frac{2}{9}y^3\right)^3 = \left(\frac{3}{8}x + \frac{2}{9}y^3\right)\left(\frac{9}{64}x^2 - \frac{1}{12}xy^3 + \frac{4}{81}y^6\right)$;

$\left(\frac{1}{3}m + \frac{3}{4}n\right) \cdot \left(\frac{1}{9}m^2 - \frac{1}{4}mn + \frac{9}{16}n^2\right) = \left(\frac{1}{3}m\right)^3 + \left(\frac{3}{4}n\right)^3 = \frac{1}{27}m^3 + \frac{27}{64}n^3$;

$\frac{8}{343}a^6 - \frac{27}{64}b^3 = \left(\frac{2}{7}a^2\right)^3 - \left(\frac{3}{4}b\right)^3 = \left(\frac{2}{7}a^2 - \frac{3}{4}b\right)\left(\frac{4}{49}a^4 + \frac{3}{14}a^2b + \frac{9}{16}b^2\right)$;

$(0{,}8a^2 - 5b)(0{,}64a^4 + 4a^2b + 25b^2) = (0{,}8a^2)^3 - (5b)^3 = 0{,}512a^6 - 125b^3$.

6. Применения формул сокращенного умножения. При помощи формул сокращенного умножения можно сравнительно быстро выполнять тождественные преобразования многих алгебраических выражений.

Пример. Упростить $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + 1)^3$.

Р е ш е н и е (по частям):

$$(x-1)(x+1)=x^2-1;$$
$$(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1;$$
$$(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1;$$
$$x^6-1-(x^6+3x^4+3x^2+1)=-3x^4-3x^2-2.$$

Однако удобней преобразования выполнять цепочкой:

$$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)-(x^2+1)^3=(x^2-1)(x^4+x^2+1)-$$
$$-(x^2+1)^3=(x^6-1)-(x^6+3x^4+3x^2+1)=-3x^4-3x^2-2.$$

Можно использовать формулы сокращенного умножения и при делении многочленов.

П р и м е р ы. $(49x^4-64y^2):(7x^2-8y)=[(7x^2)^2-(8y)^2]:(7x^2-8y)=7x^2+8y$;

$(16a^2-25b^6):(5b^3+4a)=[(4a)^2-(5b^3)^2]:(5b^3+4a)=4a-5b^3$;

$(a^3-8b^3):(a-2b)=[a^3-(2b)^3]:(a-2b)=a^2+2ab+4b^2$;

$(27x^3+8y^9):(3x+2y^3)=[(3x)^3+(2y^3)^3]:(3x+2y^3)=9x^2-6xy^3+4y^6$.

Формулы сокращенного умножения используют также при устных вычислениях. Пусть, например, надо вычислить $50{,}5^2-49{,}5^2$. В данном случае возводить в квадраты было бы нерационально, лучше воспользоваться формулой разности квадратов:

$$50{,}5^2-49{,}5^2=(50{,}5+49{,}5)\cdot(50{,}5-49{,}5)=100\cdot 1=100.$$

Еще пример: $31\cdot 29=(30+1)\cdot(30-1)=900-1=899$. Такие вычисления можно выполнять устно.

§ 7. Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители — значит представить его в виде произведения многочленов, тождественного данному многочлену.

Ниже укажем простейшие способы разложения многочленов на множители.

1. Вынесение за скобки общего множителя. Чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, надо: а) определить этот общий множитель; б) разделить на него все члены многочлена; в) записать произведение общего множителя на полученное частное, взяв это частное в скобки.

Примеры.

$2ax^3 - 4a^2x^2 = 2ax^2(x - 2a)$;

$40m^2n - 25mn^2 + 30mn = 5mn(8m - 5n + 6)$;

$x(p - a) - y(p - a) - z(p - a) = (p - a)(x - y - z)$;

$a^2(x - 1) - b(1 - x) = a^2(x - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(a^2 + b)$.

2. Способ группировки. Этот способ изложим на примере.

Пример. Разложить на множители $3a - 3b + ax - bx$. Общего множителя все члены данного многочлена не имеют, но если сгруппируем члены по два в том порядке, как они написаны, то выражение примет вид

$$(3a - 3b) + (ax - bx).$$

Если вынесем в первой группе общий множитель 3, а во второй общий множитель x, получим:

$$3(a - b) + x(a - b).$$

В этом выражении общим множителем является $a - b$. Следовательно,

$$3a - 3b + ax - bx = (a - b)(3 + x).$$

Примечание. Данный пример можно решить также другим способом: $3a - 3b + ax - bx = (3a + ax) - (3b + bx) = a(3 + x) - b(3 + x) = (3 + x)(a - b)$.

В некоторых случаях прежде чем группировать члены, нужно отдельные члены многочлена подать в виде суммы или разности.

Примеры. $x^2 + 8x + 12 = x^2 + 6x + 2x + 12 = x(x + 6) + 2(x + 6) = (x + 6)(x + 2)$.

$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4)(x + 2)$.

$6x^2 - x - 1 = 6x^2 - 3x + 2x - 1 = 3x(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)(3x + 1)$.

3. Разложение на множители по формулам сокращенного умножения. Способ разложения на множители заключается в использовании формул сокращенного умножения, которые надо читать не только слева направо, но и справа налево, т. е. надо пользоваться следующими формулами:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Примеры. а) $(x+y)^2-(x-y)^2=(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy$;

б) $-6a-a^2-9=-(a^2+6a+9)=-(a+3)^2$;

в) $m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$;

г) $125m^3-75m^2n+15mn^2-n^3=(5m-n)^3$;

д) $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$;

е) $125a^3-\frac{1}{64}b^6=\left(5a-\frac{1}{4}b^2\right)\left(25a^2+1\frac{1}{4}ab^2+\frac{1}{16}b^4\right)$.

4. Применение различных способов разложения на множители. При разложении многочленов на множители часто используются несколько приемов.

В каждом отдельном случае надо предварительно изучить состав данного многочлена и затем определить, какие приемы разложения на множители здесь следует использовать. В большинстве случаев приходится применять все указанные выше приемы разложения на множители в различной последовательности. Иногда при этом используют искусственные приемы.

Примеры.

а) $mp-np+m^2-2mn+n^2=(mp-np)+(m^2-2mn+n^2)=p(m-n)+(m-n)^2=(m-n)(p+m-n)$;

б) $1-p^2-2pq-q^2=1-(p^2+2pq+q^2)=1-(p+q)^2=(1+p+q)(1-p-q)$;

в) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)=b^2c+bc^2+c^2a-ca^2-ab(a+b)=(b^2c-ca^2)+(bc^2+c^2a)-ab(a+b)=c(b^2-a^2)+c^2(b+a)-ab(a+b)=c(a+b)(b-a)+c^2(a+b)-ab(a+b)=(a+b)[c(b-a)+c^2-ab]=(a+b)(bc-ac+c^2-ab)=(a+b)[(bc-ab)+(c^2-ac)]=(a+b)[b(c-a)+c(c-a)]=(a+b)\times(c-a)(b+c)$;

г) $x^3+5x^2+3x-9=(x^3-1)+(5x^2-5)+(3x-3)=(x-1)\times(x^2+x+1)+5(x^2-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)+5(x-1)(x+1)+3(x-1)=(x-1)[x^2+x+1+5(x+1)+3]=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2$.

§ 8. Алгебраические дроби

1. Дробные выражения и алгебраические дроби. Алгебраическое выражение называется *дробным*, если среди указанных в нем действий есть деление на буквенное выражение.

Примеры дробных выражений:

$$\frac{3ax}{a+x},\quad 2a-\frac{1}{a^2},\quad \frac{a-\frac{1}{b}}{b-\frac{1}{a}},\quad \frac{1}{a+\frac{1}{b+c}}.$$

Простейшими среди дробных выражений считаются выражения вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены. Они называются *алгебраическими дробями*. Многочлены A и B называются соответственно *числителем* и *знаменателем* алгебраической дроби. Числитель и знаменатель называются также членами дроби.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{3ax+c}{x-0{,}5c^2},\quad \frac{2a}{a-1},\quad \frac{a^2+b-a}{2},\quad \frac{0{,}7}{4x}.$$

Примечание. Напомним, что одночлен считается частным видом многочлена (стр. 159). В частности, число 1 также можно рассматривать как многочлен. Поэтому каждое целое алгебраическое выражение можно считать алгебраической дробью со знаменателем, равным 1. Каждую обыкновенную дробь также можно рассматривать как алгебраическую дробь.

2. Основное свойство алгебраической дроби. Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить на одно и то же неравное нулю число. Это свойство с помощью букв записывается так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

где a и b — члены дроби, а m может быть любым числом — целым или дробным (положительным и отрицательным), но не равным нулю.

Из этого свойства вытекают следующие положения.

Значение дроби не изменится, если у числителя и знаменателя одновременно изменить знаки на противоположные.

Например. $\frac{-3x}{-4y}=\frac{-3x(-1)}{-4y(-1)}=\frac{3x}{4y}$;

$$\frac{8a}{-13b^2}=\frac{8a(-1)}{-13b^2(-1)}=\frac{-8a}{13b^2}.$$

Значение дроби не изменится, если изменить знак у одного из членов дроби и перед самой дробью.

Примеры. $-\frac{a-b}{-c}=+\frac{a-b}{-c(-1)}=\frac{a-b}{c}$;

$$\frac{a-1}{b-2}=-\frac{(a-1)(-1)}{b-2}=-\frac{1-a}{b-2}.$$

3. Сокращение дробей. *Сократить дробь* — это значит разделить ее числитель и знаменатель на их общий делитель.

Если числитель и знаменатель дроби одночлены, то общие делители находят устно и затем сокращают.

Пример. $\dfrac{24a^4b^2c}{40a^3b^2} = \dfrac{3ac}{5}$.

Если числитель и знаменатель дроби многочлены, то их надо предварительно разложить на множители (если это возможно) и после этого произвести сокращение.

Пример. $\dfrac{ac - bc + ad - bd}{ac + bc + ad + bd} = \dfrac{(ac - bc) + (ad - bd)}{(ac + bc) + (ad + bd)} =$

$$= \frac{c(a-b) + d(a-b)}{c(a+b) + d(a+b)} = \frac{(a-b)(c+d)}{(a+b)(c+d)} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Иногда для нахождения общего делителя многочленов используют алгоритм Евклида.

Пример. Сократить дробь

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3}.$$

Найдем общий делитель многочленов

$$a^4 + a^2b^2 + b^4, \quad a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

а) Разделим первый многочлен на второй:

$$\begin{array}{l|l}
a^4 + a^2b^2 + b^4 & a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\underline{a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + ab^3} & \overline{a - 2b} \\
-2a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4 & \\
\underline{-2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3 - 2b^4} & \\
+ 3a^2b^2 + 3ab^3 + 3b^4 = 3b^2(a^2 + ab + b^2). &
\end{array}$$

б) Разделим делитель $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$ на один из сомножителей остатка, — на $a^2 + ab + b^2$:

$$\begin{array}{l|l}
-a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 & a^2 + ab + b^2 \\
\underline{a^3 + a^2b + ab^2} & \overline{a + b} \\
a^2b + ab^2 + b^3 & \\
\underline{a^2b + ab^2 + b^3} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно, общим делителем будет $a^2 + ab + b^2$. Тогда

$$a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a + b),$$
$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

Значит $\dfrac{a^4 + a^2b^2 + a^4}{a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3} = \dfrac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)(a + b)} =$

$$= \frac{a^2 - ab + b^2}{a + b}.$$

4. Приведение дробей к общему знаменателю. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю выполняется так же, как и в арифметике.

Простейшим общим знаменателем дробей с одночленными знаменателями есть наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей *, умноженное на все различные буквы, входящие в знаменатели, причем каждую букву берут с наибольшим показателем, с каким она входит в знаменатели.

Так, например, простейший общий знаменатель дробей

$$\frac{5x}{ab},\quad \frac{2y}{3a^2b}\quad \text{и}\quad -\frac{1}{2a^2b^3}$$

равен $6a^2b^2$.

Дополнительные множители следующие:

$$6a^2b^2 : ab = 6ab,$$
$$6a^2b^2 : 3a^2b = 2b,$$
$$6a^2b^2 : 2a^2b^2 = 3.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{5x}{ab} = \frac{5x \cdot 6ab}{ab \cdot 6ab} = \frac{30xab}{6a^2b^2};$$

$$\frac{2y}{3a^2b} = \frac{2y \cdot 2b}{3a^2b \cdot 2b} = \frac{4yb}{6a^2b^2};$$

$$-\frac{1}{2a^2b^2} = -\frac{1 \cdot 3}{2a^2b^2 \cdot 3} = -\frac{3}{6a^2b^2}.$$

Для вычисления простейшего общего знаменателя дробей с многочленными знаменателями сначала надо их разложить на множители.

Пример. Привести к общему знаменателю алгебраические дроби: $\frac{m+n}{2m-2n}$ и $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

Решение. $2m - 2n = 2(m - n)$,

$m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$.

---

* Если они — натуральные числа.

Следовательно,

$$\frac{m+n}{2m-2n}=\frac{(m+n)(m+n)}{(2m-2n)(m+n)}=\frac{m^2+2mn+n^3}{2m^2-2n^2};$$

$$\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{(m^2+n^2)\cdot 2}{(m^2-n^2)\cdot 2}=\frac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}.$$

Ответ. $\dfrac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}$, $\dfrac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}$.

Примечание. Если не требуется, чтобы общий знаменатель был *простейшим*, можно, не тратя времени на разложение многочленов, просто взять за общий знаменатель произведение знаменателей данных дробей.

§ 9. Действия с алгебраическими дробями

1. Сложение и вычитание. *Чтобы сложить (вычесть) алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить (вычесть) их числители и результат разделить на их общий знаменатель.*

Пример. Сложить $\dfrac{a}{2x^2}$, $\dfrac{1}{2x^2}$ и $\dfrac{a-5}{2x^2}$.

Решение.

$$\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{a-5}{2x^2}=\frac{a+1+a-5}{2x^2}=\frac{2a-4}{2x^2}=\frac{a-2}{x^2}.$$

Пример. Вычислить алгебраическую сумму дробей

$$\frac{x+1}{a-b}-\frac{x+2}{b-a}-\frac{x-1}{a-b}.$$

Решение.

$$\frac{x+1}{a-b}-\frac{x+2}{b-a}-\frac{x-1}{a-b}=\frac{x+1}{a-b}+\frac{x+2}{a-b}-\frac{x-1}{a-b}=$$

$$=\frac{x+1+x+2-x+1}{a-b}=\frac{x+4}{a-b}.$$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, сложить (вычесть) числители и результат разделить на их общий знаменатель.

Пример. Упростить выражение:

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}.$$

Р е ш е н и е. Разложим знаменатели на множители:

$$a^2+2a+1=(a+1)^2,$$
$$a^2-2a+1=(a-1)^2,$$
$$a^2-1=(a-1)(a+1).$$

Общий знаменатель равен $(a+1)^2(a-1)^2$. Следовательно,

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}=\frac{(a-1)(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-$$
$$-\frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}=\frac{(a-1)^3-(a+1)^3-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$
$$=\frac{(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3+3a^2+3a+1)-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$
$$=\frac{a^3-3a^2+3a-1-a^3-3a^2-3a-1-a^2+1}{(a^2-1)^2}=\frac{-7a^2-1}{(a^2-1)^2}.$$

Так как каждое целое алгебраическое выражение можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем 1, пользуясь изложенными выше правилами, можно складывать и вычитать также алгебраические дроби и целые выражения.

П р и м е р.

$$a-b+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a-b}{1}+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}.$$

2. **Умножение и деление дробей.** *Чтобы перемножить дроби, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе знаменателем.*

Чтобы разделить дробь на дробь, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Примеры умножения и деления дробей с одночленными числителями и знаменателями:

$$\frac{3p^2mq}{2a^2b^2}\cdot\frac{3abc}{8pq}=\frac{3p^2mq\cdot 3abc}{2a^2b^2\cdot 8pq}=\frac{9pmc}{16ab};$$
$$\frac{8b^2cd}{9a^5}:\frac{7cd}{12a^3}=\frac{8b^2cd}{9a^5}\cdot\frac{12a^3}{7cd}=\frac{8b^2cd\cdot 12a^3}{9a^5\cdot 7cd}=\frac{32b^2}{21a^2}.$$

При умножении и делении дробей с многочленными числителями и знаменателями их числители и знаменатели разлагают на множители и сокращают, если это возможно.

Примеры:

$$\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\frac{x-y}{x^2+2xy}=\frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x-y)}\cdot\frac{x-y}{x(x+2y)}=$$

$$=\frac{(x+2y)(x-2y)(x-y)}{x(x-y)x(x+2y)}=\frac{x-2y}{x^2};$$

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}:\frac{4a-4b}{3a+3b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}:\frac{4(a-b)}{3(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)\cdot 3(a+b)}{(a+b)^2\cdot 4(a-b)}=\frac{3}{4}.$$

Пользуясь правилом умножения алгебраических дробей, можно также умножать алгебраическую дробь на целое выражение и наоборот, ведь целое выражение можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем 1.

Примеры.

$$\frac{a}{x-c}\cdot 2x=\frac{a}{x-c}\cdot\frac{2x}{1}=\frac{a\cdot 2x}{(x-c)\cdot 1}=\frac{2ax}{x-c};$$

$$\frac{1}{x^2-1}\cdot(x^4-1)=\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{x^4-1}{1}=\frac{x^4-1}{x^2-1}=x^2+1.$$

3. Возведение в степень. Чтобы возвести алгебраическую дробь в какую-нибудь степень, надо возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.

Примеры. $\left(\frac{a}{3x^2}\right)^4=\frac{a^4}{(3x^2)^4}=\frac{a^4}{81x^8}$,

$$\left(\frac{a-1}{a+c}\right)^3=\frac{(a-1)^3}{(a+c)^3}.$$

4. Упражнения на все действия. Если надо выполнить несколько действий над данными алгебраическими дробями или упростить громоздкое выражение с алгебраическими дробями, можно выполнять преобразования двумя способами: *по частям* и *цепочкой*.

Пример. Упростить выражение

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right).$$

Решение первым способом:

1) $\dfrac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\dfrac{b}{a^2+b^2}=$

$=\dfrac{a^2+ab+ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=$

$=\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$;

$(a^3+a^2b)+(ab^2+b^3)=$
$=a^2(a+b)+b^2(a+b)=$
$=(a+b)(a^2+b^2)$.

2) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}=$

$=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}=$

$=\dfrac{a-b}{a^2+b^2}$;

$(a^3-a^2b)+(ab^2-b^3)=$
$=a^2(a-b)+b^2(a-b)=$
$=(a-b)(a^2+b^2)$.

3) $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}:\dfrac{a-b}{a^2+b^2}=$

$=\dfrac{(a+b)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a-b)}=\dfrac{a+b}{a-b}$.

Решение вторым способом:

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)=$$

$$=\left[\frac{a(a+b)}{a^2(a+b)+b^2(a+b)}+\frac{b}{a^2+b^2}\right]:\left[\frac{1}{a-b}-\right.$$

$$\left.-\frac{2ab}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}\right]=\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\right.$$

$$\left.-\frac{2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}\right)=\frac{a+b}{a^2+b^2}:\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{(a+b)\cdot(a-b)(a^3+b^3)}{(a^2+b^2)\cdot(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 10. Квадратные корни

1. Определения. *Квадратным корнем* из числа a называется число, сло, квадрат которого равен a.

Например, квадратный корень из 9 равен 3, так как $3^2=9$.

Однако —3 также есть квадратный корень из 9, так как $(-3)^2 = 9$. Квадратный корень из 9 имеет два значения: 3 и —3.

Положительное значение квадратного корня называется также *арифметическим значением*. Арифметическое значение квадратного корня из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют *знаком квадратного корня* или *радикалом*. Число или выражение a, которое стоит под радикалом, называется *подкоренным числом* или *выражением*.

Подкоренное число может быть не только целым, но и дробным. Например, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Квадратный корень из 0 имеет только одно значение: 0.

Квадратный корень из отрицательного числа не существует: нет рационального числа, квадрат которого был бы отрицательным.

2. **Извлечение квадратных корней.** Вычисление квадратных корней называют также *извлечением* квадратных корней. Действие извлечения квадратного корня обратно действию возведения в квадрат: если из положительного числа a извлечь квадратный корень и результат возвести в квадрат, получим то же число a, т. е.

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Из небольших чисел, являющихся *точными квадратами* натуральных чисел, например 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 и т. д., квадратные корни можно извлекать устно.

Чтобы извлечь квадратный корень из многоцифрового целого числа, разбивают его справа налево на *грани*, содержащие по две цифры (в крайней левой грани может оказаться и одна цифра).

Записывают так:

$$\sqrt{27'98'41} = 529$$

	25
102	298
2	204
1049	9441
9	9441
	0

Чтобы получить первую цифру корня (5), извлекают квадратный корень из наибольшего точного квадрата, содержащегося в первой слева грани (27). Потом вычитают из первой грани квадрат первой цифры корня (25) и к разности приписывают (сносят) следующую грань (98). Слева от полученного числа (298) пишут удвоенную пер-

вую цифру корня (10), делят на нее число всех десятков ранее полученного числа (29 : 10 ≈ 2), испытывают частное (102 · 2 = 204 должно быть не большим 298), после чего записывают его (2) после первой цифры корня и т. д.

Примечание. Распространена и другая форма записи, например

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5'79'36'49} = 2407 & \\ \underline{4} & \\ 179 & 44 \\ \underline{176} & \underline{4} \\ 33649 & 4807 \\ \underline{33649} & \underline{7} \\ 0 & \end{array}$$

Проверка. $2407^2 = 5793649$.

Аналогично извлекают квадратные корни из десятичных дробей. Только подкоренное число надо разбивать на грани так, чтобы запятая была между гранями.

Пример. $\sqrt{0,'00'95'64'84'} = 0,0978$

$$\begin{array}{r|l} & 81 \\ \hline 187 & 14\ 64 \\ 7 & 13\ 09 \\ \hline 1948 & 1\ 55\ 84 \\ 8 & 1\ 55\ 84 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Примечание. Если десятичная дробь имеет нечетное число десятичных знаков, из нее точно квадратный корень не извлекается.

3. **Приближенные значения квадратных корней.** Если подкоренное число приближенное, то квадратный корень из него также будет приближенным числом. Квадратные корни из приближенных чисел можно извлекать точно так же, как из точных, но с учетом следующего правила подсчета цифр.

При извлечении квадратного корня из приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержит подкоренное число. Чтобы правильно определить последнюю значащую цифру, ищут в результате на одну значащую цифру больше, чем в подкоренном числе, а затем результат округляют по правилу округления, отбрасывая эту запасную цифру.

Пример. Извлечь квадратный корень из приближенного числа 2,37.

Решение. $\sqrt{2{,}37} = 1{,}53$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 25 & 1\ 37 \\ 5 & 1\ 25 \\ \hline 303 & 1200 \\ 3 & 909 \\ \hline 3069 & 29100 \\ 9 & 27621 \\ \hline & 1479 \end{array}$$

Ответ. $\sqrt{2{,}37} \approx 1{,}54$ (с избытком).

Однако приближенные значения квадратных корней получают не только в результате извлечения квадратных корней из приближенных чисел, но также из точных. Пусть, например, требуется извлечь квадратный корень из точного числа 2. Имеем:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ \ldots$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 24 & 100 \\ 4 & 96 \\ \hline 281 & 400 \\ 1 & 281 \\ \hline 2824 & 11900 \\ 4 & 11296 \end{array}$$

Этот процесс можно продолжать без конца. Поэтому $\sqrt{2}$ в виде десятичной дроби можно дать только приближенно с любой точностью.

§ 11. Иррациональные числа

1. **Понятие иррационального числа.** Если продолжать извлекать квадратный корень из 2, получим *бесконечную непериодическую* десятичную дробь *.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots\ .$$

Это — не рациональное число, так как каждое рациональное число равно или конечной, или бесконечной периодической десятичной дроби (стр. 102). Этот пример приводит к следующему заключению. Или мы не должны считать $\sqrt{2}$ числом, или должны расширить уже

* Можно доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Из этого следует, что $\sqrt{2}$ не равно ни конечной десятичной дроби, ни бесконечной периодической десятичной дроби.

известное нам множество рациональных чисел, прибавив к ним новые, не рациональные числа, которые представляют собой бесконечные непериодические десятичные дроби. Но если не считать $\sqrt{2}$ числом, тогда мы не смогли бы, например, выражать числами длины многих отрезков. Получилось бы, что диагональ квадрата со стороной 1 *см* не имеет длины. В самом деле, если сторона квадрата *ABCD* (рис. 19) равна 1 *см*, то его площадь равна 1 *кв. см*, а площадь квадрата *ACKL* равна 2 *кв. см* (сравните, сколько равных треугольников содержится в каждом квадрате). Значит, длина стороны *AC* должна выражаться числом, квадрат которого равен 2. А среди рациональных чисел такого числа нет. Вот почему условились считать числами и $\sqrt{2}$ и все бесконечные непериодические десятичные дроби. Но они — не рациональные числа, их называют *иррациональными числами*.

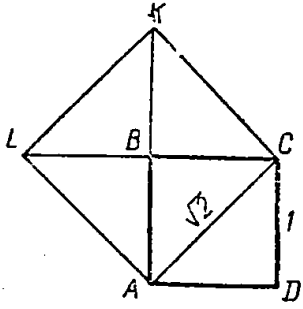


Рис. 19.

Иррациональным называют каждое число, которое можно выразить бесконечной непериодической десятичной дробью.

Иррациональные числа бывают и положительные, и отрицательные.

Примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \quad \sqrt{10} = 3{,}162\ldots, \quad -0{,}5050050005\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159\ldots, \quad \lg 2 = 0{,}3010\ldots, \quad \cos 10^0 = 0{,}9848\ldots \text{ и др.}$$

Рациональные и иррациональные числа вместе называются *действительными*, или *вещественными числами*.

Несмотря на то, что существование отрезков, длины которых нельзя выразить рациональным числом, обнаружили еще в древней Греции (Пифагор, Евклид), однако они не ввели иррациональных чисел. Они считали, что длина таких отрезков не может быть выражена числом, так как рассматривали только рациональные числа.

Впервые к понятию иррационального числа пришли ученые ближнего и среднего Востока.

В начале XIII в. иррациональные числа появляются и у западноевропейских ученых, прежде всего у Леонардо Пизанского, однако рассматриваются они лишь с геометрической точки зрения, как неравноправные числа. Это мнение разделяло большинство математиков до XVII в. Однако развитие математики в XVII в. и ознакомление с новыми фактами заставили задуматься над самим понятием иррационального числа. К началу XVIII в. большинство математиков считало, что иррациональное число является корнем некоторой степени из целого или дробного числа, который не может быть выражен

точно. Несколько иначе рассматривал иррациональные числа Ньютон, исходивший из отношения некоторого числа к числу, принятому за единицу; при несоизмеримости обоих чисел первое из них и получило название иррационального.

2. **Сравнение действительных чисел.** *Из двух положительных действительных чисел больше то, у которого целая часть больше. Если целые части равны, большим считается то число, у которого первый из неравных десятичных знаков больше, а все предшествующие одинаковы. Из двух отрицательных действительных чисел большим считается то, у которого абсолютная величина меньше. Каждое отрицательное число меньше нуля и любого положительного числа.*

Примеры. $1{,}4142\ldots > 1{,}4139\ldots$
$-1{,}4152\ldots < -1{,}4139\ldots$
$-0{,}0674\ldots < 0{,}00176\ldots$
$9{,}8691\ldots < 9{,}87$

Равными считаются такие действительные числа, которые изображаются одной и той же десятичной дробью.

3. **Геометрическое изображение действительных чисел.** Действительные числа, как и рациональные, можно изображать на числовой оси точками. Пусть дана числовая ось (рис. 20) с начальной (нулевой) точкой O и единичным отрезком OA. Изобразим на этой оси точку, отвечающую иррациональному числу $\sqrt{2}$. Для этого строим на отрезке OA квадрат, его диагональ $OC = \sqrt{2}$. Если раствором циркуля OC, как показано на рисунке, сделать засечку на оси, то полученная точка пересечения дуги с осью K и будет соответствовать числу $\sqrt{2}$.

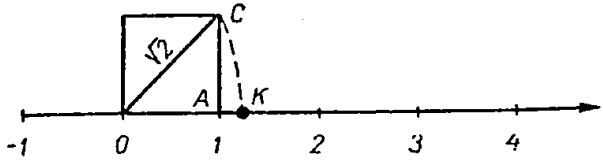


Рис. 20.

Каждому действительному числу на числовой оси соответствует единственная точка. Наоборот, каждой точке на числовой оси соответствует единственное действительное число. Говорят, что между всеми точками числовой оси и всеми действительными числами существует *взаимно однозначное соответствие*.

Примечание. Между точками числовой оси и всеми рациональными числами не существует взаимно однозначного соответствия, так как не каждой точке оси соответствует рациональное число.

4. Приближение иррациональных чисел рациональными. Пусть ь иррациональное число α выражается такой бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\alpha = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} + \ldots$$

Тогда конечные дроби

$$p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \quad \text{и} \quad p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

между которыми заключено число α, называются его десятичными приближенными значениями по недостатку и по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Для получения десятичного приближенного значения по недостатку данного действительного числа с точностью до $\frac{1}{10^n}$ следует в десятичной дроби, изображающей это число, сохранить n первых десятичных знаков и откинуть все последующие. Увеличив на 1 последний десятичный знак приближенного значения по недостатку, мы получим приближенное значение по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Пример. Рассмотрим число 3,5781.... Его приближенные значения суть:

По недостатку	По избытку	С точностью до
3	4	1
3,5	3,6	0,1
3,57	3,58	0,01
3,578	3,579	0,001

§ 12. Действия над действительными числами

1. Обозначения. Если α данное действительное число, то его де- е- сятичные приближенные значения по недостатку с точностью до 1, 0,1, 0,01 и т. д. до $\frac{1}{10^n}\cdots$ будем обозначать соответственно символами $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n, \ldots$, а приближенные значения по избытку—

символами $\overset{+}{\alpha}_0, \overset{+}{\alpha}_1, \overset{+}{\alpha}_2, \ldots, \overset{+}{\alpha}_n, \ldots$. Пусть, например, $\alpha = 3{,}1471\ldots$. Тогда

$$\overline{\alpha}_0 = 3; \quad \overline{\alpha}_1 = 3{,}1; \quad \overline{\alpha}_2 = 3{,}14; \quad \overline{\alpha}_3 = 3{,}147; \ldots.$$
$$\overset{+}{\alpha}_0 = 4; \quad \overset{+}{\alpha}_1 = 3{,}2; \quad \overset{+}{\alpha}_2 = 3{,}15; \quad \overset{+}{\alpha}_3 = 3{,}148; \ldots.$$

2. **Сложение.** *Суммой двух положительных действительных чисел называется действительное число, большее суммы любых приближенных значений слагаемых по недостатку, но меньшее суммы любых приближенных значений слагаемых по избытку.*

Пример. Положим $\alpha = 3{,}3121\ldots$ и $\beta = 2{,}5483\ldots$, складываем приближенные значения по недостатку:

$\overline{\alpha}_0 = 3$	$\overline{\beta}_0 = 2$	$\overline{\alpha}_0 + \overline{\beta}_0 = 5$
$\overline{\alpha}_1 = 3{,}3$	$\overline{\beta}_1 = 2{,}5$	$\overline{\alpha}_1 + \overline{\beta}_1 = 5{,}8$
$\overline{\alpha}_2 = 3{,}31$	$\overline{\beta}_2 = 2{,}54$	$\overline{\alpha}_2 + \overline{\beta}_2 = 5{,}85$
$\overline{\alpha}_3 = 3{,}312$	$\overline{\beta}_3 = 2{,}548$	$\overline{\alpha}_3 + \overline{\beta}_3 = 5{,}860$
$\overline{\alpha}_4 = 3{,}3121$	$\overline{\beta}_4 = 2{,}5483$	$\overline{\alpha}_4 + \overline{\beta}_4 = 5{,}8604$

Складываем приближенные значения по избытку:

$\overset{+}{\alpha}_0 = 4$	$\overset{+}{\beta}_0 = 3$	$\overset{+}{\alpha}_0 + \overset{+}{\beta}_0 = 7$
$\overset{+}{\alpha}_1 = 3{,}4$	$\overset{+}{\beta}_1 = 2{,}6$	$\overset{+}{\alpha}_1 + \overset{+}{\beta}_1 = 6{,}0$
$\overline{\alpha}_2 = 3{,}32$	$\overset{+}{\beta}_2 = 2{,}55$	$\overset{+}{\alpha}_2 + \overset{+}{\beta}_2 = 5{,}87$
$\overset{+}{\alpha}_3 = 3{,}313$	$\overset{+}{\beta}_3 = 2{,}549$	$\overset{+}{\alpha}_3 + \overset{+}{\beta}_3 = 5{,}862$
$\overset{+}{\alpha}_4 = 3{,}3122$	$\overset{+}{\beta}_4 = 2{,}5484$	$\overset{+}{\alpha}_4 + \overset{+}{\beta}_4 = 5{,}8606$

Так последовательно определяют десятичные знаки суммы

$$\alpha + \beta = 5{,}860\ldots.$$

Примечание. Если какое-нибудь слагаемое рациональное и выражается конечной десятичной дробью или даже является целым числом, его тоже можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, приписав в качестве десятичных знаков бесконечное число нулей, например:

$$2{,}3 = 2{,}3000\ldots; \quad 7 = 7{,}000\ldots$$

Тогда сумму рационального и иррационального чисел можно также определять изложенным выше способом.

Аналогично можно определить и сумму двух отрицательных действительных чисел, и отрицательного с положительным.

Вообще, сложение двух действительных чисел всегда возможно и однозначно.

3. **Умножение.** *Произведением двух положительных действительных чисел* α *и* β *называется действительное число, большее произведения любых приближенных значений сомножителей по недостатку, но меньшее произведения любых приближенных значений сомножителей по избытку.*

Пример. Положим $\alpha = 1{,}7320\ldots$; $\beta = 1{,}4142\ldots$, тогда получим

$\bar{\alpha}_0 = 1$	$\bar{\beta}_0 = 1$	$\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0 = 1$
$\bar{\alpha}_1 = 1{,}7$	$\bar{\beta}_1 = 1{,}4$	$\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1 = 2{,}38$
$\bar{\alpha}_2 = 1{,}73$	$\bar{\beta}_2 = 1{,}41$	$\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_2 = 2{,}4393$
$\bar{\alpha}_3 = 1{,}732$	$\bar{\beta}_3 = 1{,}414$	$\bar{\alpha}_3\bar{\beta}_3 = 2{,}449048$
$\bar{\alpha}_4 = 1{,}7320$	$\bar{\beta}_4 = 1{,}4142$	$\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_4 = 2{,}44939440$
$\overset{+}{\alpha}_0 = 2$	$\overset{+}{\beta}_0 = 2$	$\overset{++}{\alpha}_0\beta_0 = 4$
$\overset{+}{\alpha}_1 = 1{,}8$	$\overset{+}{\beta}_1 = 1{,}5$	$\overset{++}{\alpha}_1\beta_1 = 2{,}70$
$\overset{+}{\alpha}_2 = 1{,}74$	$\overset{+}{\beta}_2 = 1{,}42$	$\overset{++}{\alpha}_2\beta_2 = 2{,}4708$
$\overset{+}{\alpha}_3 = 1{,}733$	$\overset{+}{\beta}_3 = 1{,}415$	$\overset{++}{\alpha}_3\beta_3 = 2{,}452195$
$\overset{+}{\alpha}_4 = 1{,}7321$	$\overset{+}{\beta}_4 = 1{,}4143$	$\overset{++}{\alpha}_4\beta_4 = 2{,}44970903$

Так последовательно определяют десятичные знаки произведения

$$\alpha\beta = 2{,}449\ldots$$

Умножение отрицательных действительных чисел выполняют согласно с правилами, данными для рациональных чисел: произведение двух отрицательных чисел считается положительным, а отрицательного и положительного — отрицательным.

Действия вычитание, деление и возведение в степень действительных чисел определяются так же, как и для рациональных чисел.

Законы арифметических действий в множестве всех действительных чисел остаются справедливы, как и для множества рациональных чисел.

§ 13. Иррациональные выражения

1. **Корень** m**-й степени.** Раньше (см. стр. 180) было введено понятие квадратного корня, или, как его еще называют, корня второй степени. Но в математике рассматриваются корни не только второй, но и третьей, четвертой, пятой и вообще m-й степени.

Пусть m — произвольное натуральное число больше 1, а a—любое вещественное число. Корнем m-й степени из a называется такое число, m-я степень которого равна a.

Примеры. Корень 3-й степени из 64 равен 4, так как $4^3 = 64$; корень 5-й степени из -32 равен -2, так как $(-2)^5 = -32$; корень 4-й степени из 81 имеет (в множестве действительных чисел) два значения: 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Корень m-й степени из числа a обозначают символом $\sqrt[m]{a}$. Однако в случае корня четной степени, например 2-й, 4-й и т. д., этим символом обозначают только неотрицательное значение корня, например $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[6]{0{,}000001} = 0{,}1$. Их называют арифметическими значениями корней или короче *арифметическими корнями*.

Следовательно, $\sqrt[m]{a}$ только при отрицательном a и нечетном m имеет отрицательное значение. При положительном a $\sqrt[m]{a}$ число всегда положительное. Если же $a < 0$, а m четное, то $\sqrt[m]{a}$ (в множестве действительных чисел) не существует.

Примечание. Знак радикала впервые ввели немецкие алгебраисты в XV в. В 1525 г. математик Христоф Рудольф фон Яуэр издал первое сочинение по алгебре на немецком языке. Знак корня он применял в форме $\sqrt{}$. Горизонтальную черту над подрадикальным выражением ввел французский геометр Рене Декарт (1637 г.), а показатель корня над радикалом — голландский математик Альбер Жирар (1629 г.).

2. Иррациональные выражения. Раньше мы рассматривали рациональные алгебраические выражения, содержащие только действия сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с натуральным показателем. Дальше будут рассматриваться и такие выражения, которые, кроме этих пяти действий, содержат также и действие извлечения корня m-й степени. Такие алгебраические выражения называются *иррациональными*.

Примеры иррациональных выражений:

$$\sqrt{2{,}5a},\quad c^2d\sqrt[5]{m-n},\quad \frac{a}{\sqrt[3]{c}}+\sqrt{3},\quad 5\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3}.$$

Иррациональные выражения вида $a\sqrt{b}$ называют также радикалами.

3. Тождественные преобразования иррациональных выражений. Определение тождественных иррациональных выражений и тождественного преобразования остаются такими же, как и для рациональных выражений (см. стр. 161).

Дальше рассмотрим важнейшие тождественные преобразования иррациональных выражений.

4. Основное свойство радикала. *Величина радикала не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножим на одно и то же число*, т. е.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Из этого свойства получаем следствия:

1) *Радикалы разных степеней можно привести к одинаковым показателям.*

Выполняют это так: находят общее кратное (лучше всего наименьшее) показателей всех радикалов и умножают показатель каждого из них на соответствующий дополнительный множитель, возвышая вместе с тем каждое подкоренное выражение в надлежащую степень.

Примеры. Привести к общему показателю радикалы:

а) $\sqrt{ax}$, $\sqrt[3]{a^2}$;

б) $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[5]{\frac{y^3}{z^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$;

в) $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, $\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}}$, $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$.

Решение. а) Наименьшее общее кратное показателей радикалов 6; дополнительные множители будут: для первого радикала 3, для второго 2. Тогда:

$$\sqrt{ax} = \sqrt[6]{(ax)^3} = \sqrt[6]{a^3x^3}; \quad \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{(a^2)^2} = \sqrt[6]{a^4}.$$

б) Наименьшее кратное показателей радикалов 30; дополнительные множители соответственно будут: 15, 6, 10. Тогда

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[30]{\left(\frac{x}{y}\right)^{15}} = \sqrt[30]{\frac{x^{15}}{y^{15}}}; \quad \sqrt[5]{\frac{y^3}{z^2}} = \sqrt[30]{\left(\frac{y^3}{z^2}\right)^6} = \sqrt[30]{\frac{y^{18}}{z^{12}}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} = \sqrt[30]{\left(\frac{a^2}{b}\right)^{10}} = \sqrt[30]{\frac{a^{20}}{b^{10}}}.$$

в) Наименьшее кратное показателей радикалов $4n$; дополнительные множители соответственно будут n, 2 и 4. Тогда

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4n]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n} = \sqrt[4n]{\frac{(x-1)^n}{(x+1)^n}};$$

$$\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt[4n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = \sqrt[4n]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}};$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[4n]{\left(\frac{x}{y}\right)^4} = \sqrt[4n]{\frac{x^4}{y^4}}.$$

2) *Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить оба показателя,* т. е.

$$\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

Примечание. Эта теорема требует дополнительного условия: $\sqrt[n]{a^p}$ должен существовать, так как без этого теорема может быть неверной. Например, вместо $\sqrt[8]{(-2)^6}$ нельзя писать $\sqrt[4]{(-2)^3}$, так как последний корень в области действительных чисел не существует. Всегда верно следующее равенство:

$$\sqrt[mn]{|a^{mp}|} = \sqrt[n]{|a|^p}.$$

В частности,

$$\sqrt[m]{|a^{mp}|} = |a^p|;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Примеры.

$$\sqrt[6]{x^9} = \sqrt{x^3};$$

$$\sqrt[4]{0{,}04} = \sqrt[4]{(0{,}2)^2} = \sqrt{0{,}2};$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3;$$

$$\sqrt[8]{(1-\sqrt{2})^6} = \sqrt[4]{|1-\sqrt{2}|^3} = \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^3}.$$

3) *Если подкоренное выражение есть произведение нескольких степеней, показатели которых имеют один и тот же общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить все показатели.*

Пример 1. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:

а) $\sqrt[6]{b^4c^8}$; б) $\sqrt[6]{8x^3y^3}$.

Решения.

а) $\sqrt[6]{b^4c^8} = \sqrt[3]{b^2c^4}$;

б) $\sqrt[6]{8x^3y^3} = \sqrt[6]{2^3x^3y^3} = \sqrt{2xy}$.

Пример 2. Сократить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения при заданных условиях:

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} \text{ при } x<1; \quad \sqrt[8]{(3-x)^4} \text{ при } x>3.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$\sqrt[2mk]{a^{2m}} = \sqrt[2mk]{|a|^{2m}} = \sqrt[k]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[k]{a}, & \text{если } a>0, \\ \sqrt[k]{-a}, & \text{если } a<0. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt[4]{|x-1|^2} = \sqrt{|x-1|} = \sqrt{-(x-1)} = \\ = \sqrt{-x+1} \quad (x<1);$$

$$\sqrt[8]{(3-x)^4} = \sqrt[8]{|3-x|^4} = \sqrt{|3-x|} = \sqrt{-(3-x)} = \\ = \sqrt{-3+x} \quad (x>3).$$

5. Основные теоремы о радикалах. *Корень из произведения нескольких чисел равен произведению корней той же степени из каждого числа, если корень из каждого числа существует,* т. е.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Чтобы извлечь корень из дроби, надо извлечь его из числителя и знаменателя, если эти корни существуют, и первый результат разделить на второй, т. е.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Примечания. Оговорки о существовании корней в предыдущих теоремах необходимы, так как при четных n и отрицательных a и b корни $\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ существуют, а $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ не существуют. В этих случаях приведенные выше равенства неверны. Однако всегда верны равенства:

$$\sqrt[n]{|ab|} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|} \text{ и } \sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, нужно разделить показатель степени на показатель корня, т. е.

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m.$$

Примечание. При a отрицательном, n четном и m нечетном приведенное выше равенство неверно. Однако всегда справедливо равенство

$$\sqrt[n]{|a^{mn}|} = |a^m|.$$

Пользуясь этими теоремами, можно извлекать корни из различных алгебраических выражений.

Примеры. Извлечь корни *:

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}a^6c^9}$; в) $\sqrt{\frac{9a^4b^2}{(a-b)^4}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8n}x^{16}}$.

Решения.

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 10^5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{10^5} = 2 \cdot 10 = 20$;

б) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}a^6c^9} = \sqrt[3]{\frac{125}{64}} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{c^9} = \frac{5}{4}a^2c^3$;

в) $\sqrt{\frac{9a^4b^2}{(a-b)^4}} = \frac{\sqrt{9a^4b^2}}{\sqrt{(a-b)^4}} = \frac{3a^2b}{(a-b)^2}$;

г) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8n}x^{16}} = \frac{2}{3}a^{2n}x^4$.

6) Вынесение множителей за знак радикала. *Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых можно извлечь точный корень, то такие множители, по извлечении из них корня, могут быть написаны перед знаком корня* (т. е. могут быть вынесены за знак корня).

Это выполняется по формуле

$$\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b}. \quad (a > 0).$$

Примеры. а) $\sqrt[3]{a^6c} = a^2\sqrt[3]{c}$;

б) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$;

в) $\sqrt[n]{a^{2n}c^{n+1}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot c^n \cdot c} = a^2c\sqrt[n]{c}$.

Примечание. При отрицательном a и четном n равенство $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b}$ неверно, но при любых значениях a, b и n

$$\sqrt[n]{|a^nb|} = |a| \cdot \sqrt[n]{|b|}.$$

* И здесь, и в следующих примерах на преобразования радикалов с четными показателями, где не даются дополнительные условия, следует под буквами понимать положительные числа.

Примеры. Вынести множители за знак радикала, учитывая допустимые значения букв или ограничения на них:

а) $\sqrt{a^5(b-3)^2}$ при $a>0$, $b\geqslant 3$.

б) $\sqrt{a^3(3-a)^2}$ при $0<a\leqslant 3$.

в) $\sqrt{\dfrac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}}$.

Решения.

а) $\sqrt{a^5(b-3)^2}=a^2(b-3)\sqrt{a}$.

б) $\sqrt{a^3(a-3)^2}=a(3-a)\sqrt{a}$.

в) $\sqrt{\dfrac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}}=\sqrt{\dfrac{3(x-y)^2}{4(x+y)^2}}=\dfrac{|x-y|}{|x+y|}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Подведение множителей под знак корня. *Для подведения под знак корня множителей, стоящих перед ним, достаточно возвысить такие множители в степень, показатель которой равен показателю корня, а затем написать эти степени под знаком корня.*

Это выполняется по формуле

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.\quad (a>0)$$

Примеры.*

а) $2xy\sqrt{\dfrac{3x}{2y}}=\sqrt{4x^2y^2\cdot\dfrac{3x}{2y}}=\sqrt{\dfrac{12x^3y^2}{2y}}=\sqrt{6x^3y}$.

б) $\dfrac{x}{y^2}\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{y^8}\cdot\dfrac{y}{x}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4y}{xy^8}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y^7}}$.

в) $(a-b)\sqrt{\dfrac{2}{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-b)^2\cdot\dfrac{2}{a^2-b^2}}=\sqrt{\dfrac{2(a-b)}{a+b}}$.

г) $x\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\sqrt[3]{x^3+x}$.

д) Внести множители под знак радикала при заданных значениях букв:

$(2-a)\sqrt{\dfrac{2a}{a-2}}$ при $a>2$; $\dfrac{2}{x-y}\sqrt{\dfrac{y^2-x^2}{2}}$ при $0<x<y$.

* В примерах а) — г) все множители перед радикалами считаются положительными.

Решение.

$$(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}} = -(a-2)\sqrt{\frac{2a}{a-2}} = -\sqrt{(a-2)^2 \cdot \frac{2a}{a-2}} =$$
$$= -\sqrt{2a(a-2)};$$
$$\frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}} = -\frac{2}{y-x}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}} =$$
$$= -\sqrt{\left(\frac{2}{y-x}\right)^2 \cdot \frac{y^2-x^2}{2}} = -\sqrt{\frac{2(x+y)}{y-x}}.$$

е) Не извлекая корни, определить, которое из чисел больше:

$$2\sqrt{3} \text{ или } 3\sqrt{2}; \quad 2\sqrt[3]{3} \text{ или } \sqrt[3]{25}.$$

Решение.

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$, так как $\sqrt{18} > \sqrt{12}$, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$, так как $\sqrt[3]{25} > \sqrt[3]{24}$, то $\sqrt[3]{25} > 2\sqrt[3]{3}$.

8. Освобождение подкоренного выражения от дроби. Используя два предыдущих преобразования радикалов, можно освобождать подкоренные выражения от дроби.

Примеры. Освободить подкоренные выражения от дроби:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{2}{7}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{\frac{3}{8}}.$$

Решение. а) Чтобы в первом радикале из знаменателя можно было извлечь квадратный корень, умножим оба члена дроби на 7:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7^2}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}.$$

б) Чтобы во втором радикале из знаменателя можно было извлечь кубический корень, умножим оба члена дроби на 3^2:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 3^2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}.$$

в) Чтобы в третьем радикале из знаменателя можно было извлечь корень четвертой степени, умножим оба числа на 2 (так как $8 = 2^3$):

$$\sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 2}{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{2^4}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{6}.$$

Если подкоренное выражение — алгебраическая дробь, подобные примеры решают аналогично.

Примеры.

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{mn}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{mn};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3m}{2a}} = \sqrt[3]{\frac{3m \cdot (2a)^2}{(2a)^3}} = \frac{1}{2a}\sqrt[3]{12a^2m};$$

$$15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m}{27m^2n^3}} = 15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m \cdot 3m^2n}{27m^2n^3 \cdot 3m^2n}} = 15mn\sqrt[4]{\frac{3a^3m^3n}{(3mn)^4}} =$$

$$= 15mn \cdot \frac{1}{3mn}\sqrt[4]{3a^3m^3n} = 5\sqrt[4]{3a^3m^3n}.$$

$$(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy\,(x-y)^2}{(x-y)^4}} =$$

$$= (x-y)^2 \cdot \frac{1}{|x-y|}\sqrt[4]{xy\,(x-y)^2} = |x-y|\sqrt[4]{xy\,(x-y)^2}.$$

Примечание. Последние примеры можно решать и другим способом:

$$15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m}{27m^2n^3}} = 5\sqrt[4]{\frac{3^4 \cdot m^4n^4 \cdot a^3m}{27m^2n^3}} = 5\sqrt[4]{3a^3m^3n}.$$

$$(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}} = |x-y| \cdot \sqrt[4]{\frac{(x-y)^4\,xy}{(x-y)^2}} =$$

$$= |x-y|\sqrt[4]{(x-y)^2\,xy}.$$

9. Приведение радикалов к простейшему виду. Для того чтобы привести радикал к простейшему, или нормальному виду, надо выполнить последовательно такие операции:

1) упростить подкоренное выражение (если это возможно);

2) сократить показатели корня и подкоренного выражения (если они имеют общий множитель);

3) вынести из-под радикала рациональные множители;

4) освободить подкоренное выражение от дроби.

Примеры. Привести к простейшему виду следующие радикалы:

$$\text{а) } \frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}}; \quad \text{б) } \frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}; \quad \text{в) } \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8-a^6b^2};$$

$$\text{г) } a^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}}.$$

Решение.

$$\text{а) } \frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}}=\frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{4\cdot 2xy}{x^2y^2}}=\frac{3xy^2}{2}\cdot\frac{2}{xy}\sqrt{2xy}=3y\sqrt{2xy};$$

$$\text{б) } \frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}=\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a\cdot 2^2b}{2^4b^2c^3\cdot 2^2b}}=\frac{2ab^2}{c}\cdot\frac{1}{2^2bc}\sqrt[3]{20ab}=$$

$$=\frac{ab}{2c^2}\sqrt[3]{20ab};$$

$$\text{в) } \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8-a^6b^2}=\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^6(a^2-b^2)}=\frac{1}{a}\cdot a^2\sqrt[3]{a^2-b^2}=a\sqrt[3]{a^2-b^2};$$

$$\text{г) } a^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}}=a^2\sqrt[4]{\frac{a-1}{a^4}}=a^2\cdot\frac{1}{a}\sqrt[4]{a-1}=a\sqrt[4]{a-1}.$$

10. Подобие радикалов. Два или несколько радикалов называются *подобными*, если они одинаковой степени и имеют одинаковые подкоренные выражения.

Пример. $a\sqrt[3]{x^2c}$ и $4x\sqrt[3]{x^2c}$ — подобные радикалы, так как они оба третьей степени и имеют одинаковые подкоренные выражения x^2c. Иногда данные радикалы оказываются подобными только после некоторых преобразований.

Примеры. а) Подобны ли радикалы

$$\sqrt{18}, \quad \sqrt{128}, \quad \sqrt{32}?$$

Решение.

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 9}=3\sqrt{2}; \quad \sqrt{128}=\sqrt{2\cdot 64}=8\sqrt{2};$$
$$\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 16}=4\sqrt{2}.$$

Ответ. Подобны.

б) Подобны ли радикалы

$$\sqrt[3]{\frac{8}{3}} \text{ и } \sqrt[3]{\frac{8}{9}}?$$

Решение.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{1\cdot 3}{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{3^2}{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{9}.$$

Ответ. Не подобны.

в) Подобны ли радикалы

$$\frac{x}{y}\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)}, \quad x\sqrt{\frac{z}{xz-yz}} \text{ и } \sqrt{\frac{4x}{y^2}-\frac{4}{y}}?$$

Решение.

$$\frac{x}{y}\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)} = \frac{x}{y}\sqrt{x^2y\cdot\frac{x-y}{y}} = \frac{x^2}{y}\sqrt{x-y};$$

$$x\sqrt{\frac{z}{xz-yz}} = x\sqrt{\frac{z}{z(x-y)}} = x\sqrt{\frac{1}{x-y}} = \frac{x}{|x-y|}\sqrt{x-y};$$

$$\sqrt{\frac{4x}{y^2}-\frac{4}{y}} = \sqrt{\frac{4x-4y}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{4(x-y)} = \frac{2}{y}\sqrt{x-y}.$$

Ответ. Подобны.

§ 14. Действия с радикалами

1. **Сложение и вычитание.** *Чтобы сложить (или вычесть) радикалы, их соединяют знаками плюс (или минус) и приводят подобные члены, если они окажутся.*

Примеры. Выполнить указанные действия:

а) $(2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18}) + (\sqrt{72} - \sqrt{80})$.

Решение.

$$(2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18}) + (\sqrt{72} - \sqrt{80}) = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{80} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{5} = 15\sqrt{2} - 3\sqrt{5}.$$

б) $(\sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y}) - (\sqrt[3]{27y} - \sqrt{16x})$.

Решение.

$$(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x})=\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}-\sqrt[3]{27y}+\sqrt{16x}=$$
$$=3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}-3\sqrt[3]{y}+4\sqrt{x}=7\sqrt{x}-5\sqrt[3]{y}.$$

в) $5\sqrt[3]{x^2y^5}+4y^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}+\frac{4y}{x^2}\sqrt[3]{-x^8y^2}-6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}-$
$$-\frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}}.$$

Решение.

$$5\sqrt[3]{x^2y^5}+4y^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}+\frac{4y}{x^3}\sqrt[3]{-x^8y^3}-6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}-\frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}}=$$
$$=5y\sqrt[3]{x^2y^2}+4y^2\cdot\frac{1}{y}\sqrt[3]{x^2y^2}-\frac{4y}{x^2}\cdot x^2\sqrt[3]{x^2y^2}-6xy\cdot\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2y^2}-$$
$$-\frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{2}{xy}\right)\sqrt[3]{x^2y^2}=5y\sqrt[3]{x^2y^2}+4y\sqrt[3]{x^2y^2}-4y\sqrt[3]{x^2y^2}-$$
$$-6y\sqrt[3]{x^2y^2}+3y\sqrt[3]{x^2y^2}=+2y\sqrt[3]{x^2y^2}.$$

г) $\sqrt{1-\frac{x}{2}}+3\sqrt{4-2x}-\sqrt{16-8x}+8\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{x}{2}}.$

Решение.

$$\sqrt{1-\frac{x}{2}}+3\sqrt{4-2x}-\sqrt{16-8x}+8\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{x}{2}}=$$
$$=\sqrt{1-\frac{x}{2}}+3\sqrt{4\left(1-\frac{x}{2}\right)}-\sqrt{16\left(1-\frac{x}{2}\right)}+$$
$$+8\sqrt{\frac{1}{4}(1-2x)}=\sqrt{1-\frac{x}{2}}+6\sqrt{1-\frac{x}{2}}-4\sqrt{1-\frac{x}{2}}+$$
$$+4\sqrt{1-2x}=3\sqrt{1-\frac{x}{2}}+4\sqrt{1-2x}.$$

2. Умножение. *Чтобы перемножить несколько радикалов одинаковой степени, надо перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень той же степени.*

Если перемножаются радикалы с различными показателями, то их надо предварительно привести к одному показателю. Если перед радикалами имеются коэффициенты, то их перемножают.

Пример 1. Выполнить умножение:

а) $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}$.

Решение.

$$5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}=10\sqrt[4]{16a^4}=10\cdot 2a=20a;$$

б) $\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6}$.

Решение.

$$\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6}=2\sqrt{36}-6\sqrt{18}+10\sqrt{12}-$$
$$-\sqrt{48}=12-18\sqrt{2}+10\cdot 2\sqrt{3}-4\sqrt{3}=12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}.$$

в) $(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}$.

Решение.

$$(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}=8x^2y\sqrt[3]{x^3y}-$$
$$-10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2}+2x^2y^2\sqrt[3]{xy^3}=8x^3y\sqrt[3]{y}-10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2}+2x^2y^3\sqrt[3]{x}.$$

г) $(7\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}-1)$.

Решение.

$$(7\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}-1)=14\sqrt{25}-8\sqrt{5}-7\sqrt{5}+4=$$
$$=70+4-15\sqrt{5}=74-15\sqrt{5}.$$

Пример 2. Перемножить радикалы с различными показателями:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{8};$$

б) $m\sqrt{3m}:\sqrt[4]{3m}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^3}$.

Решение.

$$m\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^3}=m\sqrt[8]{3^4m^4}\cdot\sqrt[8]{3^2m^2}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^3}=$$
$$=m^3\sqrt[8]{3^7m^9}=3m^4\sqrt[8]{\frac{m}{3}}.$$

в) $(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3})$.

Решение.

$$(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3})=(a\sqrt[12]{a^6}+\sqrt[12]{a^2})\cdot(\sqrt[12]{a^8}-$$
$$-a\sqrt[12]{a^9})=a\sqrt[12]{a^{14}}-a^2\sqrt[12]{a^{15}}+\sqrt[12]{a^{10}}-a\sqrt[12]{a^{11}}=$$
$$=a^2\sqrt[12]{a^2}-a^3\sqrt[12]{a^3}+\sqrt[12]{a^{10}}-a\sqrt[12]{a^{11}}=a^2\sqrt[6]{a}-a^3\sqrt[4]{a}+$$
$$+\sqrt[6]{a^5}-a\sqrt[12]{a^{11}}.$$

3. Деление. *Чтобы разделить радикалы с одинаковыми показателями, надо разделить их подкоренные выражения и из частного извлечь корень той же степени.*

Чтобы разделить радикалы с различными показателями, их надо привести предварительно к одинаковым показателям. Если есть коэффициенты, то их делят.

Пример 1. Выполнить деление:

а) $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{\frac{6a^4}{2a}}=\sqrt[3]{3a^3}=a\sqrt[3]{3}.$$

б) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}};\ \frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}}$.

Решение.

$$-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6\cdot5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)\,2bx^2}{x^2(a-b)}}=-15\sqrt{b};$$
$$\frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}}=\frac{3a}{5b}\sqrt[6]{\frac{a^4}{(a-x)^2}}:\frac{2a}{5b}\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(a-x)^3}}=$$
$$=\frac{3a\cdot5b}{5b\cdot2a}\sqrt[6]{\frac{a^4(a-x)^3}{(a-x)^2\,8a^3}}=\frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{a(a-x)}{8}}.$$

в) $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}$.

Решение.

$$\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}=\frac{45x}{8}\sqrt{\frac{2x^2}{3y^2}}-$$
$$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{y^2}}+\frac{5}{4}\sqrt{\frac{x^2}{3}}=\frac{15x^2}{8y}\sqrt{6}-\frac{3}{2y}\sqrt{2}+\frac{5x}{12}\sqrt{3}.$$

г) $(\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}) : (\sqrt{2y} - \sqrt{x})$.

Решение.

$$(\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}) : (\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = (2x\sqrt{2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}) :$$
$$: (\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = [(x\sqrt{2y} - x\sqrt{x}) + (x\sqrt{2y} - 2y\sqrt{x})] :$$
$$: (\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = [x(\sqrt{2y} - \sqrt{x}) - \sqrt{2xy}(\sqrt{2y} - \sqrt{x})] : (\sqrt{2y} - \sqrt{x}) =$$
$$= (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(x - \sqrt{2xy}) : (\sqrt{2y} - \sqrt{x}) = x - \sqrt{2xy}.$$

Пример 2. Выполнить деление с помощью формул сокращенного умножения:

$$(\sqrt[3]{25a^2} - \sqrt[3]{16b^2}) : (\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b}).$$

Решение.

$$(\sqrt[3]{25a^2} - \sqrt[3]{16b^2}) : (\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b}) = [(\sqrt[3]{5a})^2 - (\sqrt[3]{4b})^2] :$$
$$: (\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b}) = (\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b})(\sqrt[3]{5a} + \sqrt[3]{4b}) : (\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b}) =$$
$$= \sqrt[3]{5a} + \sqrt[3]{4b}.$$

4. **Возвышение в степень.** *Чтобы возвысить радикал в степень, надо возвысить в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:*

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Примеры.

$$(\sqrt[3]{2ax^2})^2 = \sqrt[3]{4a^2x^4} = x\sqrt[3]{4a^2x};$$
$$(\sqrt[3]{(x+y)^2})^5 = \sqrt[3]{(x+y)^{10}} = (x+y)^3\sqrt[3]{x+y};$$
$$(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m})^{np} = \sqrt[n]{(x^2+y^2)^{mnp}} = (x^2+y^2)^{mp}.$$

Алгебраические суммы радикалов можно возводить в степень, пользуясь формулами сокращенного умножения.

Примеры.

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6};$$
$$(\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt{3^3} - 3 \cdot 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{2^3} =$$
$$= 3\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{2} + 12\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} - 16 = 3\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{2} +$$
$$+ 12\sqrt[6]{432} - 16;$$

$$(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = 3+\sqrt{5}+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+$$
$$+3-\sqrt{5} = 6+2\sqrt{9-5} = 6+2\cdot 2 = 10;$$
$$(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2 = [(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})-\sqrt{10}]^2 =$$
$$= (3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2 - 2(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})\sqrt{10}+(\sqrt{10})^2 =$$
$$= 18-12\sqrt{10}+20-6\sqrt{20}+4\sqrt{50}+10 =$$
$$= 48-12\sqrt{10}-12\sqrt{5}+20\sqrt{2}*.$$

5. Извлечение корня. *Чтобы извлечь корень из корня, надо перемножить показатели корней:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Примеры.

а) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$;

б) $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^5}$;

в) $\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}} = \sqrt{x\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^5}{y^3}}}} = \sqrt{x\sqrt[6]{\frac{x^5}{y^3}}} =$

$$= \sqrt{\sqrt[6]{\frac{x^{11}}{y^3}}} = \sqrt[12]{\frac{x^{11}}{y^3}} = \frac{1}{y}\sqrt[12]{x^{11}y^9}.$$

6. Квадратный корень из двучлена вида $A \pm \sqrt{B}$. При преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, иногда пользуются формулой

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

где $A > 0$, $B > 0$ и $A^2 > B$, а знаки в правой и левой части одновременно берутся либо верхние, либо нижние (соответственно). Эта формула называется *формулой сложного радикала.*

Примеры.

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1);$$

* Можно также воспользоваться формулой квадрата многочлена (см. стр. 169).

б) $\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}}-$

$$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}.$$

7. **Уничтожение иррациональности в знаменателе или числителе дроби.** Замена дроби, у которой знаменатель (числитель) — иррациональное выражение, тождественной ей дробью с рациональным знаменателем (числителем) называется уничтожением иррациональности в знаменателе (числителе) дроби.

Ниже рассмотрены основные приемы уничтожения иррациональностей в знаменателях. Уничтожение иррациональностей в числителях дробей выполняется аналогично.

а) Дробь вида $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}$, $n>k$. В этом случае умножают числитель и знаменатель на такой множитель, чтобы в знаменателе корень извлекался бы нацело, т. е. на $\sqrt[n]{b^{n-k}}$.

Примеры.

$$\frac{5}{\sqrt[4]{125}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}}=\frac{5\sqrt[4]{5}}{5}=\sqrt[4]{5};$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{9}}=\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2}{3}\sqrt[5]{27};$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}\sqrt[n]{x}}=\frac{a\sqrt[n]{x}}{x}.$$

б) Дробь вида $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Числитель и знаменатель умножают на *сопряженное** выражение $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$.

---

* *Сопряженным* множителем относительно иррационального выражения M называется всякое выражение B, неравное тождественно нулю, такое, что произведение MB не содержит радикалов.

В частном случае, когда дробь вида $\frac{A}{p\sqrt{a} \pm q}$, то ее члены умножают на $p\sqrt{a} \mp q$.

Примеры.

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5}-\sqrt{8})(\sqrt{5}+\sqrt{8})} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2} = $$

$$= \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{5-8} = -2(\sqrt{5}+\sqrt{8});$$

$$\frac{6}{3\sqrt{2}+4} = \frac{6(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} = \frac{6(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2})^2-4^2} =$$

$$= \frac{6(3\sqrt{2}-4)}{18-16} = 3(3\sqrt{2}-4);$$

$$\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})} = \frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{75-45} = \frac{1}{2}(5\sqrt{3}+3\sqrt{5});$$

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2} = \frac{a+b-2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}+a-b}{a+b-(a-b)} =$$

$$= \frac{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}{2b} = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

в) Дробь вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$. В этом случае числитель и знаменатель дроби умножают на неполный квадрат разности или суммы: $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Примеры.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}} = \frac{6(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})} =$$

$$= \frac{6(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})}{(\sqrt[3]{7})^3-(\sqrt[3]{4})^3} = 2(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16});$$

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{(1+\sqrt[3]{5})(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}=\frac{1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{1+5}=$$
$$=\frac{1}{6}(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).$$

г) Дробь вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$. В этом случае сопряженный множитель определяется на основании тождества

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}).$$

Для дроби вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$ сопряженный множитель определяется на основании тождества

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\pm b^{n-1})$$

(последний член b^{n-1} берется со знаком $+$ при n нечетном, и $-$ при n четном).

Пример.

$$\frac{4}{1+\sqrt[5]{2}}=\frac{4(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})}{(1+\sqrt[5]{2})(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})}=$$
$$=\frac{4}{3}(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}).$$

Если в знаменателе встречаются радикалы с разными показателями, то надо предварительно привести их к одному знаменателю.

Пример.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4}}=$$
$$=\frac{\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5}}{(\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4})(\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5})}=$$
$$=\frac{\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5}}{27-4}=\frac{\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5}}{23}.$$

Но такие примеры можно решать и другим способом, уничтожая сначала один радикал, а затем второй:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{(3-\sqrt[3]{4})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})}{23}.$$

д) Дробь вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$. В этом случае пользуются тождеством

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

е) Если в знаменателе имеются три и более радикалов, то иногда полезно предварительно сгруппировать члены и свести данный случай к уже разобранным.

Пример.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}.$$

8. Примеры более сложных преобразований.

а) Доказать, что при $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ $(b>0,\ a>0)$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\begin{cases} b & \text{при } b\geqslant 1,\\ \frac{1}{b} & \text{» } 0<b<1.\end{cases}$$

Доказательство.

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a+\sqrt{a^2-\left(\frac{2ab}{b^2+1}\right)^2}}{\frac{2ab}{b^2+1}}=\frac{a(b^2+1)+\sqrt{a^2(b^2-1)^2}}{2ab}.$$

Если $0 < b < 1$ и $a > 0$, то

$$\sqrt{a^2(b^2-1)^2} = -a(b^2-1).$$

Следовательно, данное выражение равно

$$\frac{a(b^2+1)-a(b^2-1)}{2ab} = \frac{1}{b}.$$

Если $b \geqslant 1$, то данное выражение равно

$$\frac{a(b^2+1)+a(b^2-1)}{2ab} = b.$$

б) Доказать, что если $x = \sqrt{ab}$ и $a > b > 0$, то

$$A = \frac{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Решение. Разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{(a-x)(x-b)}$, получим:

$$A = \frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{x+b}{x-b}}+1}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{x+b}{x-b}}-1}.$$

Так как $x^2 = ab$; $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; $\frac{a+x}{a-x} = \frac{x+b}{x-b}$ и $a > b > 0$, то $x = \sqrt{ab} > \sqrt{b^2} = b$, т. е. $x > b > 0$, и

$$A = \frac{\frac{x+b}{x-b}+1}{\frac{x+b}{x-b}-1} = \frac{2x}{2b} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Примечание. Этот и следующий примеры можно также решить, непосредственно подставляя вместо x его значение.

в) Найти

$$A = \frac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

при

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Решение.

$$x^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right);$$

$$1+x^2=1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2.$$

Подставим значение x и $1+x^2$ в данное выражение

$$A=\frac{2b\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}}=$$

$$=\frac{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{\frac{b}{a}}}=a+b.$$

г) Упростить выражение $\dfrac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}$ при $x=\dfrac{\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a}$, если

$$a<b<2a.$$

Решение. Из условия $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}$ следует $a^2x^2=\dfrac{2a}{b}-1$ или

$$b=\frac{2a}{1+a^2x^2}.$$

Поэтому

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=\frac{(1-ax)\sqrt{1+\frac{2ax}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{1-\frac{2ax}{1+a^2x^2}}}=$$

$$=\frac{(1-ax)\sqrt{(1+ax)^2}}{(1+ax)\sqrt{(1-ax)^2}}=1,$$

так как при $a < b < 2a$ $\sqrt{\frac{2a}{b} - 1} < 1$, следовательно $1 - ax > 0$ и $1 + ax > 0$.

д) Преобразовать

$$B = \frac{2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}},$$

где x — любое действительное число, отличное от нуля.

Решение.

$$B = \frac{2x}{\sqrt{\frac{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^2}}} = \frac{2x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}}} = \frac{2x\sqrt{(1 + x^2)^2}}{\sqrt{4x^2}} =$$

$$= \frac{x}{|x|}(1 + x^2) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{если } x > 0, \\ -(1 + x)^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

§ 15. Степени с отрицательными, нулевыми и дробными показателями

1. Предварительные замечания. Раньше мы рассматривали степени только с натуральными показателями. Возведение в n-ю степень понимали как повторение некоторого числа сомножителем n раз. С этой точки зрения выражения 10^{-2}, $3^{0,3}$, $(1 - \sqrt{3})^0$ представляются бессмысленными, ведь нельзя число взять сомножителем минус два раза, 0,3 раза, 0 раз. Однако в математике рассматривают и такие выражения, т. е. степени с любыми рациональными и даже иррациональными показателями.

Какой же смысл вкладывают в эти понятия?

2. Степени с отрицательным и нулевым показателями. Под степенью какого-либо отличного от нуля числа с *отрицательным показателем* понимают дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — степень того же числа с положительным показателем, противоположным данному отрицательному, т. е. если $a \neq 0$, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Примеры. $10^{-3} = 0{,}001$; $x^{-1} = \frac{1}{x}$; $(3 - \sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(3 - \sqrt{2})^2}$.

Действия над степенями с отрицательными показателями можно выполнять по тем же правилам, что и действия над степенями с положительными показателями. Равенства

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ (a^m)^n = a^{mn};\ a^m : a^n = a^{m-n}$$

верны не только при положительных m и n, но и при отрицательных. Последнее из этих равенств теперь уже верно не только при $m > n$ (см. стр. 165), но и при $m < n$. Чтобы это равенство было справедливо при любых m и n, даже при $m = n$, вводят понятие о степени с нулевым показателем.

Под степенью любого отличного от нуля числа с *нулевым показателем* понимают единицу, т. е. если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Примеры. $3^0 = 1$, $0{,}2^0 = 1$, $(\sqrt{3} - 1)^0 = 1$, $(3 + x^2)^0 = 1$.

Примечание. Выражение 0^0 неопределенно.

3. Степени с дробными показателями. Под степенью какого-либо числа a с дробным показателем $\frac{m}{n}$ понимают корень $\sqrt[n]{a^m}$, т. е.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Примеры. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $(9 + x^2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9 + x^2}$.

Примечание. Формулу $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ в элементарной математике обычно рассматривают только при $a \geqslant 0$, так как при отрицательных значениях a выражение $\sqrt[n]{a^m}$, а следовательно, и $a^{\frac{m}{n}}$ может не иметь значения (в множестве действительных чисел).

Дробные показатели могут быть не только положительные, но и отрицательные, т. е. любыми рациональными числами.

Действия над степенями с любыми рациональными показателями выполняют по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями. Для любых рациональных u и v и действительного $a > 0$ верны равенства:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v},$$
$$a^u : a^v = a^{u-v},$$
$$(a^u)^v = a^{uv}.$$

4. Преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями. Ниже показаны некоторые наиболее часто встречающиеся виды преобразований алгебраических выражений, содержащих степени с различными рациональными показателями.

Пример 1. Вычислить значения следующих выражений:

$$\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1};\quad \frac{4^{-1}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}};\quad \frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}.$$

Решение.

$$\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3};$$

$$\frac{4^{-1}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}=\frac{\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}}{5-\frac{1}{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}-3\cdot\frac{9}{4}}{5-2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-\frac{27}{4}}{3}=\frac{-\frac{26}{4}}{3}=-2\frac{1}{6};$$

$$\frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}=\frac{\frac{1}{2^{3}}-\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{4}}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}+1}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{4^{3}}{3^{4}}}{1\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{64}{81}}{1\frac{1}{10}}=$$

$$=-\frac{431\cdot 10}{81\cdot 8\cdot 11}=-\frac{2155}{3564}.$$

Пример 2. Преобразовать следующие выражения так, чтобы они не содержали отрицательных показателей степеней:

$$\frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}},\quad \frac{5a(a-b)^{-4}}{b^{-2}(x-y)^{-2}}.$$

Решение.

$$\frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}}=\frac{x\cdot 2^3b^4}{a\cdot 5y^2}=\frac{8b^4x}{5ay^2};\quad \frac{5a\,(a-b)^{-4}}{b^{-2}(x-y)^{-2}}=\frac{5ab^2\,(x-y)^2}{(a-b)^4}.$$

Пример 3. Выполнить действия:

$$\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2};\quad (x^{-2}+a^{-3})\cdot(x^{-2}-a^{-3}).$$

Решение.

$$\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^2}=\frac{1}{\frac{25a^{2n+2}}{9b^{2n}}}=\frac{9b^{2n}}{25a^{2n+2}};$$

$$(x^{-2}+a^{-3})\,(x^{-2}-a^{-3})=(x^{-2})^2-(a^{-3})^2=x^{-4}-a^{-6}=$$

$$=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{a^6}=\frac{a^6-x^4}{a^6x^4}.$$

Пример 4. Заменить выражениями с дробными показателями следующие радикалы:

$$\sqrt[3]{x^4},\quad \sqrt[4]{a^3},\quad \sqrt{(a+b)^{-1}},\quad \sqrt[3]{(x-y)^{-2}}.$$

Решение.

$$\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}},\quad \sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}},\quad \sqrt{(a+b)^{-1}}=(a+b)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{(x-y)^{-2}}=(x-y)^{-\frac{2}{3}}.$$

Пример 5. Заменить выражения с дробными показателями радикалами:

$$m^{-1,5},\quad (x+y)^{\frac{1}{3}},\quad (x^2+y^2)^{\frac{3}{4}},\quad (p+q)^{-\frac{m}{n}}.$$

Решение.

$$m^{-1,5}=m^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{m^3}};\quad (x+y)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x+y};$$

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3};\quad (p+q)^{-\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(p+q)^{-m}}.$$

Пример 6. Упростить выражения:

а) $[(ab)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}]^{-1}\left[\left(\frac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right] : \frac{a^{\frac{5}{4}} + (a^1b)^{\frac{1}{4}}}{a-b}$

при $a > 0, \quad b > 0, \quad a > b;$

б) $\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - (1-a)^{-1}\right] \cdot \frac{a^0 + a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}} - a + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}};$

в) $\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-2x+x^2)^{-1}].$

Решение.

а) $\left[(ab)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[\left(\frac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right] : \frac{a^{\frac{5}{4}} + (a^1b)^{\frac{1}{4}}}{a-b} =$

$= \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}\left[(ab)^{\frac{1}{2}} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right] : \frac{a^{\frac{5}{4}} + ab^{\frac{1}{4}}}{a-b} = \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}} \times$

$\times \frac{(ab)^{\frac{1}{2}}(a+\sqrt{ab}) - ab}{a+\sqrt{ab}} : \frac{a^{\frac{5}{4}} + ab^{\frac{1}{4}}}{a-b} =$

$= \frac{1}{b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + ab - ab}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} : \frac{a(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a-b} =$

$= \frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}(a-b)}{b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})\,a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})\,a(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})} = b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{b};$

б) $\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - (1-a)^{-1}\right] \cdot \frac{a^0 + a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}} - a + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}} =$

$= \left(\frac{a^3}{a-1} - \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{1 + a^2 - 2a}{a^2 - a + 1} \cdot (a+1) = \frac{a^3+1}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2-a+1} \times$

$\times (a+1) = (a+1)(a^2-1);$

в) $$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right]:[(1-x)^{\frac{1}{3}}(1-2x+x^2)^{-1}]=$$

$$=\left[\frac{x}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right]:\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{x}{(1-x)(1-x)^{\frac{2}{3}}}:\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2}=x.$$

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 16. Общие сведения об уравнениях

1. Определение уравнения. Два числа или какие-нибудь выражения, соединенные знаком равенства (=), образуют *равенство*. В математике равенства употребляются в двух случаях: когда утверждают, что данные числа или выражения при таких-то значениях букв равны, и когда ставят вопрос, при каких значениях букв, входящих в выражения, эти выражения равны. В первом случае равенство называют *тождествами*, а во втором — *уравнениями*. Например, когда утверждают «при любом a действительном $a+1=1+a$», здесь равенство есть тождество; когда же ставят вопрос «при каком значении x $x+3=10$?», здесь имеем уравнение.

Уравнением называют равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами. Эти буквы, обозначающие неизвестные числа в уравнении, называются *неизвестными*. Неизвестных в уравнении может быть несколько. Например, в уравнении

$$2x+y=7x-3$$

два неизвестных: x и y.

Выражения, стоящие в уравнении слева и справа от знака равенства, называют соответственно *левой* и *правой частями* уравнения. Так, в приведенном выше уравнении $2x+y$ — левая часть, а $7x$—3— правая.

2. Виды уравнений. Различают уравнения с *одним*, *двумя*, *тремя* и т. д. *неизвестными* в зависимости от того, сколько неизвестных оно содержит. Например,

$3x-5=10$ — уравнение с одним неизвестным x.

$x^2+y=50x$ — уравнение с двумя неизвестными x и y;

$x^2=\sqrt{y-z}$ — уравнение с тремя неизвестными x, y и z.

В уравнении могут быть буквы, не являющиеся неизвестными (*параметры*). Например, уравнение $ax + 3 = c$ имеет одно неизвестное x, а параметры a и c можно считать произвольными известными числами. Такие уравнения называют *буквенными*. Уравнения, которые, кроме неизвестных, не содержат никаких букв, называются *числовыми*. Числовыми есть, например, следующие уравнения:

$$2x + 3 = 7, \quad x^y = y^x.$$

По характеру операций, выполняемых над неизвестными, уравнения делятся на алгебраические, дробные, иррациональные и трансцендентные.

Обозначим левую и правую части уравнения буквами A и B. Тогда уравнение $A = B$ называется:

1) *алгебраическим*, если A и B — многочлены;

2) *дробным* (рациональным), если A и B — рациональные выражения, причем хотя бы одно дробное;

3) *иррациональным*, если A и B — алгебраические выражения, причем хотя бы одно из них иррациональное;

4) *трансцендентным*, если хотя бы одно из выражений A и B содержит трансцендентные * операции над неизвестными.

Уравнения

$2x^2 + 3 = 7x$	и	$ax + by = c$	— алгебраические;
$x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3}{1-x}$	и	$\frac{a}{x-1} + x^2 = \frac{x-1}{c}$	— дробные;
$\sqrt{3-x} = 5$	и	$\sqrt{a+x} + \sqrt{x^2-1} = 0$	— иррациональные;
$x^y = \log_y x$	и	$\sin x - \operatorname{tg} x = 0$	— трансцендентные.

Алгебраические уравнения бывают *первой*, *второй*, *третьей* и т. д. *степени* в зависимости от степеней многочленов A и B. Например,

$3x = 2(x - 5) + 1$ — уравнение первой степени;
$0{,}5x^2 - 3{,}2x = 0$ — уравнение второй степени;
$7xy + x - y = 5$ — тоже уравнение второй степени,

так как сумма показателей при неизвестных в первом члене $7xy$ равна 2

Алгебраическое уравнение первой степени называют также *линейным* уравнением, а уравнения второй и выше степеней называют *нелинейными*.

3. Решения уравнений. Если в уравнение с одним неизвестным вместо неизвестного подставить какое-нибудь число, выраженное циф-

---

* Трансцендентными называют неалгебраические операции, например возведение в степень с иррациональным показателем, логарифмирование, вычисление значений тригонометрических функций и т. п.

рами или буквами, и в результате получится, что левая часть тождественно равна правой, то говорят, что данное число (значение неизвестного) *удовлетворяет* уравнению. В противном случае говорят, что оно *не удовлетворяет* уравнению. Значение неизвестного, удовлетворяющее уравнению, называется *решением, или корнем*, уравнения.

Например, если в уравнение $3x + 7 = 13$ вместо неизвестного x подставить число 2, получим тождество $3 \cdot 2 + 7 = 13$. Следовательно, значение $x = 2$ удовлетворяет данному уравнению, число 2 есть решение или корень этого уравнения. А значение $x = 3$ не удовлетворяет этому уравнению, так как $3 \cdot 3 + 7 \neq 13$.

Еще пример. Уравнение $2x + c = 3$ с неизвестным x имеет решение $x = 0{,}5\,(3 - c)$, так как $0{,}5\,(3 - c) \cdot 2 + c = 3$ — тождество.

Решением уравнения с несколькими неизвестными называют систему значений всех неизвестных, удовлетворяющих данному уравнению. Пусть, например, имеем уравнение с двумя неизвестными

$$x^2 + 2y = 7.$$

Пара значений $x = 1$, $y = 3$ удовлетворяет этому уравнению, так как $1^2 + 2 \cdot 3 = 7$. Эта пара чисел считается *одним решением* данного уравнения *. Существуют и другие решения этого уравнения, например $x = -1$, $y = 3$; $x = 3$, $y = -1$ и т. д.

Уравнение может не иметь совсем решений, может иметь единственное решение, несколько решений и бесконечное множество решений.

Примеры. Уравнение $x + 8 = x + 5$ не имеет решений, так как при любых действительных значениях x левая часть больше правой; уравнение $3x + 2 = 11$ имеет единственный корень $x = 3$; уравнение $x + \frac{12}{x} = 7$ имеет два корня: 3 и 4 $\left(\text{так как } 3 + \frac{12}{3} = 7;\ 4 + \frac{12}{4} = 7\right)$;

уравнение $5\,(x - 3) + 2 = 3\,(x - 4) + 2x - 1$ удовлетворяется при любом значении x, т. е. является тождеством. Приведенное выше уравнение $x^2 + 2y = 7$ также имеет бесконечное множество решений, но не является тождеством.

4. Равносильные уравнения. Два уравнения называются *равносильными* (или эквивалентными), если все решения первого уравнения являются решениями второго и, наоборот, все решения второго уравнения являются решениями первого. К равносильным уравнениям относятся также уравнения, не имеющие решений.

Примеры. Уравнения $2x - 5 = 11$ и $7x + 6 = 62$ равносильны, так как они имеют один и тот же корень $x = 8$.

---

* В таких случаях слово «корень» не употребляют.

Уравнения $x^2+y+1=8-y$ и $x^2+2y=7$ равносильны, так как каждое решение первого удовлетворяет второе и любое решение второго удовлетворяет первое уравнение;

уравнения $x+2=x+5$ и $2x+7=2x$ равносильны, потому что оба не имеют решений;

уравнения $x+2=2(x+1)-x$ и $3x=3(x-1)+3$ равносильны, поскольку любое значение x удовлетворяет и первое и второе уравнения.

Примечание. Согласно приведенному выше определению, уравнения

$$x^2-14x+49=0 \quad \text{и} \quad x-7=0$$

равносильны, так как каждый корень одного уравнения удовлетворяет также другое уравнение, и наоборот. Однако многие авторы считают их неравносильными, так как они имеют разное число корней: считают, что уравнение второй степени $x^2-14x+49=0$ имеет два одинаковых корня $x_1=7$; $x_2=7$, а уравнение первой степени $x-7=0$ имеет только один корень: $x_1=7$.

Понятие об эквивалентности уравнений является относительным: два уравнения, рассматриваемые в одной области чисел, могут быть эквивалентными, в другой же области — неэквивалентными. Например,

$$(x-2)(x^2+1)=0,$$
$$(x-2)(x^2+4)=0.$$

В области действительных чисел данные уравнения эквивалентны, в области комплексных чисел — неэквивалентны.

Два уравнения, равносильные третьему, равносильны между собой.

5. Теоремы о равносильных уравнениях. Теорема 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и тоже число или многочлен, то новое уравнение будет равносильно данному.

Так, уравнение $2x-1=7$ имеет корень $x=4$; прибавив к обеим частям по 5, получим уравнение $2x+4=12$, которое имеет тот же корень $x=4$.

Следствия из первой теоремы:

а) Если в обеих частях уравнения имеются одинаковые члены, то их можно опустить.

Так, уравнение $9x+5x=18+5x$ имеет один корень $x=2$; опустив в обеих частях $5x$, получим уравнение $9x=18$, которое имеет тот же корень $x=2$.

б) Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, переменив его знак на противоположный.

Так, уравнение $7x-11=3$ имеет один корень $x=2$, перенеся 11 в правую часть с противоположным знаком, получим уравнение $7x=3+11$, которое имеет то же решение $x=2$.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, то новое уравнение будет равносильно данному *.

Пример. Уравнение $2x - 15 = 10 - 3x$ имеет корень $x = 5$. Умножив обе части на 3, получим

$$(2x - 15) \cdot 3 = (10 - 3x) \cdot 3, \text{ или } 6x - 45 = 30 - 9x,$$

которое имеет тот же корень $x = 5$.

Деление на какое-либо число, отличное от нуля, можно рассматривать как умножение на число, ему обратное. Поэтому обе части уравнения можно также и разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Пример. Уравнение $12x^2 - 3 = 6x + 33$ имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1{,}5$.

Разделив все его члены на 3, получим уравнение $4x^2 - 1 = 2x + 11$, равносильное данному, так как оно имеет те же два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1{,}5$.

Следствия из второй теоремы: а) Знаки всех членов уравнения можно изменить на противоположные (это равносильно умножению обеих частей уравнения на -1).

Пример. Уравнение $-3x + 7 = -8$ после умножения обеих частей на -1 примет вид: $3x - 7 = 8$. Первое и второе уравнения имеют единственный корень $x = 5$.

б) Уравнение, в котором коэффициенты всех или некоторых членов дробные числа, можно заменить равносильным ему уравнением с целыми коэффициентами (для этого обе части уравнения надо умножить на наименьшее общее кратное знаменателей дробных коэффициентов).

Пример. Уравнение $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$ после умножения обеих его частей на 14 принимает вид:

$$\frac{5x - 4}{2} \cdot 14 = \frac{16x + 1}{7} \cdot 14; \quad (5x - 4) \cdot 7 = (16x + 1) \cdot 2;$$

$$35x - 28 = 32x + 2.$$

Легко убедиться в том, что первое и последнее уравнения удовлетворяются только при $x = 10$.

---

* Верны также более общие теоремы.

Теорема 1. *К обеим частям уравнения можно прибавить любое выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестного; полученное уравнение будет равносильно данному.*

Теорема 2. *Обе части уравнения можно умножить на любое выражение, имеющее смысл и отличное от нуля при всех допустимых значениях неизвестного, полученное уравнение будет равносильно данному.*

в) Уравнение можно сократить (разделить все его члены на одно и то же число).

Пример. Уравнение $75x^2 - 200x = 900 + 60x^2 - 50x$ можно сократить на 5. Тогда получим уравнение $15x^2 - 40x = 180 + 12x^2 - 10x$, равносильное данному.

Примечание. Иногда приходится умножать обе части уравнения на какое-нибудь выражение, содержащее неизвестное. В результате этого может получиться уравнение, не равносильное данному.

Примеры. Пусть дано уравнение $2x - 1 = 5$, имеющее один корень $x = 3$. Если умножить обе части этого уравнения на $x - 2$, получим новое уравнение $(2x - 1)(x - 2) = 5(x - 2)$, не равносильное данному, так как, кроме корня $x = 3$, оно имеет еще один $x = 2$, который данное уравнение не удовлетворяет. Если бы обе части данного уравнения умножили на $\frac{1}{x-3}$, то получили бы уравнение $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{x-3}$, которое вообще не имеет корней и, следовательно, тоже не равносильное данному.

Рассмотренные теоремы (их называют также свойства уравнений) и следствия из них дают возможность сравнительно легко решать многие уравнения. Ведь, преобразуя уравнение согласно упомянутым свойствам и следствиям, мы каждый раз получаем новое, более простое, уравнение, равносильное данному. Таким способом можно прийти к очень простому уравнению, корни которого определить нетрудно. А так как полученное уравнение равносильно данному, то и корни его есть не что иное как корни данного уравнения.

Дальше рассмотрим, как решать различные виды уравнений.

§ 17. Уравнения первой степени

1. Определение. Уравнением первой степени с одним неизвестным называют каждое уравнение, в одной части которого есть многочлены первой степени относительно одного неизвестного, а во второй — тоже многочлен первой степени относительно этого же неизвестного или какое-нибудь число.

Примеры. $2x + 3 = 7 - \frac{x}{5}$, $0{,}7y = 0$; $\frac{x}{2} + 1 = x - \frac{1}{2}$.

Каждое уравнение первой степени с одним неизвестным x можно привести к виду

$$ax = b.$$

Разделив обе части этого уравнения на a (если $a \neq 0$), получим единственное решение: $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то уравнение не имеет решений (при $b \neq 0$) или имеет их бесконечно много (при $b = 0$).

2. Общая схема решения уравнений первой степени. Пусть надо решить такое уравнение:

$$\frac{x-4}{3} + \frac{2(x+1)}{4} - 1 = \frac{5(x-3)}{2} + 2x - \frac{11x+43}{6}.$$

Решение. а) Умножим все члены на наименьшее общее кратное знаменателей, которое равно 12. Произведя сокращения, получаем:

$$4(x-4) + 6(x+1) - 12 = 30(x-3) + 24x - 2(11x+43).$$

б) Чтобы отделить члены, содержащие неизвестное и свободные члены, раскроем скобки:

$$4x - 16 + 6x + 6 - 12 = 30x - 90 + 24x - 22x - 86.$$

в) Сгруппируем в одной части члены, содержащие неизвестные, а в другой — свободные члены:

$$4x + 6x - 30x - 24x + 22x = -90 - 86 + 16 - 6 + 12.$$

г) Приведем подобные члены:

$$-22x = -154.$$

д) Разделим обе части на -22. Получим:

$$x = 7.$$

Как видим, корень полученного уравнения, а значит и данного, равен $x = 7$.

Вообще такие уравнения можно решать по следующей схеме:

а) привести уравнение к целому виду;

б) раскрыть скобки;

в) сгруппировать члены, содержащие неизвестное, в одной части уравнения, а свободные члены — в другой;

г) привести подобные члены;

д) решить уравнение вида $ax = b$, которое получили после приведения подобных членов.

Однако эта схема не может быть обязательной для всякого уравнения. Во-первых, при решении многих, более простых, уравнений приходится начинать не с первого, а со второго, третьего и даже сразу с пятого этапа. Во-вторых, при решении некоторые промежуточные этапы могут оказаться ненужными. В-третьих, иногда бывает выгоднее нарушить порядок, указываемый схемой, так как уравнение тогда решается проще и короче.

Аналогично можно решать и уравнения первой степени с одним неизвестным с буквенными коэффициентами.

Примеры:

а) $cx - b(c - x) = a(b - x) - b(a - x)$;

$cx - bc + bx = ab - ax - ab + bx$;

$cx - bc = -ax$;

$cx + ax = bc$; $x(a + c) = bc$;

$$x = \frac{bc}{a + c} \text{ (если } a \neq -c).$$

б) $$\frac{a - x}{b - a} + \frac{3x}{a + b} = \frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2};$$

$$-\frac{\overbrace{a+b}}{\frac{a - x}{a - b}} + \frac{\overbrace{a-b}}{\frac{3x}{a + b}} = \frac{\overbrace{1}}{\frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2}};$$

$-(a - x)(a + b) + 3x(a - b) = 3a^2 - ab - 4b^2$;

$-a^2 - ab + ax + bx + 3ax - 3bx = 3a^2 - ab - 4b^2$;

$4ax - 2bx = 4a^2 - 4b^2$; $2x(2a - b) = 4(a^2 - b^2)$;

$$x = \frac{4(a^2 - b^2)}{2(2a - b)}; \quad x = \frac{2(a^2 - b^2)}{2a - b} \text{ (если } 2a \neq b).$$

3. Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. К уравнениям первой степени приводятся многие дробные уравнения с одним неизвестным. Чтобы решить такое уравнение, часто приходится умножать обе части на выражение, содержащее неизвестное, а это, как показано на стр. 220, может привести к нарушению эквивалентности уравнений. Поэтому при решении этих уравнений надо все полученные корни проверять подстановкой в начальное уравнение. Корни, не удовлетворяющие начальному уравнению, надо отбросить как посторонние.

Примеры. а) Решить уравнение $\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{x + 2} = \frac{13}{x^2 + x - 2}$.

Решение. Разлагая $x^2 + x - 2$ на множители, получаем: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Следовательно, $x^2 + x - 2$ — общий знаменатель дробей. Тогда дополнительными множителями будут соответственно $x + 2$, $x - 1$, 1.

$$\frac{\overbrace{x+2}}{\frac{2}{x - 1}} + \frac{\overbrace{x-1}}{\frac{5}{x + 2}} = \frac{\overbrace{1}}{13}{x^2 + x - 2};$$

$$\frac{2(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} + \frac{5(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{13}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Для упрощения уравнения надо обе части его умножить на $(x-1)(x+2)$; получим:

$$2(x+2)+5(x-1)=13;$$
$$2x+4+5x-5=13;$$
$$7x=13-4+5;$$
$$7x=14;\quad x=2.$$

Проверка. $\frac{2}{2-1}+\frac{5}{2+2}=\frac{13}{4+2-2}$; $2+\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{13}{4}=\frac{13}{4}$. $x=2$ удовлетворяет данному уравнению.

Ответ. $x=2$.

б) Решить уравнение $\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x+2}=\frac{6}{x^2+x-2}$. (1)

Решение. Общий знаменатель x^2+x-2; дополнительные множители: $x+2$, $x-1$, 1.

$$\frac{\overbrace{2}^{x+2}}{x-1}+\frac{\overbrace{5}^{x-1}}{x+2}=\frac{\overbrace{6}^{1}}{x^2+x-2};\qquad (2)$$
$$\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{5(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{6}{(x-1)(x+2)}.$$

Умножаем обе части уравнения на $(x-1)(x+2)$, получаем

$$2(x+2)+5(x-1)=6; \qquad (3)$$
$$2x+4+5x-5=6;$$
$$7x=7;$$
$$x=1.$$

Уравнение (3) имеет корень $x=1$. Но он является посторонним для данного уравнения, так как 1 не может быть допустимым значением для x: при $x=1$ знаменатель первой и третьей дроби уравнения (1) обращается в нуль. Эквивалентность нарушилась при переходе от уравнения (2) к уравнению (3).

Ответ. Данное уравнение не имеет решений.

в) Решить уравнение $\frac{x-2}{x+3}=\frac{2(x-2)}{x+5}$.

Решение. Приводим к общему знаменателю

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{2(x-2)(x+3)}{(x+5)(x+3)}.$$

Умножаем обе части уравнения на $(x+5)(x+3)$, получаем: $(x-2)(x+5)=2(x-2)(x+3)$.

Делим обе части уравнения на $x-2$,

$$x+5=2(x+3);\quad x+5=2x+6;$$
$$-1=x;\quad x=-1.$$

Легко убедиться, что $x=-1$ удовлетворяет данному уравнению. Однако при делении уравнения $(x-2)(x+5)=2(x-2)(x+3)$ на $x-2$ мы потеряли корень $x=2$. Чтобы не было потери корня, уравнение надо решать так:

$$(x-2)(x+5)-2(x-2)(x+3)=0;$$
$$(x-2)[(x+5)-2(x+3)]=0;$$
$$(x-2)(x+5-2x-6)=0;\ (x-2)(-x-1)=0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Тогда полученное уравнение распадется на два: $x-2=0$ и $-x-1=0$. Отсюда имеем: $x_1=2$, $x_2=-1$.

Ответ. $x_1=2$; $x_2=-1$.

§ 18. Решение задач с помощью уравнений первой степени с одним неизвестным

Чтобы решить задачу с помощью уравнения, необходимо:

1) выбрать неизвестное и обозначить его буквой; 2) выразить остальные неизвестные при помощи этой буквы; 3) составить уравнение; 4) решить уравнение; 5) проверить полученное решение и ответ по условию задачи. Дальше для примера приведены решения нескольких задач с помощью составления уравнений первой степени.

Задача 1. На первом складе было 185 *т* угля, а на втором — 237 *т*. Первый склад начал отпускать ежедневно по 15 *т* угля, а второй — по 18 *т*. Через сколько дней на втором складе будет угля в полтора раза больше, чем на первом?

Решение (с объяснением). Предположим, что через x дней на втором складе будет угля в полтора раза больше, чем на первом. Первый склад отпускал ежедневно по 15 *т* угля, поэтому за x дней с первого склада было выдано угля $15x$ (*т*). Значит, на первом складе осталось угля $185-15x$ (*т*). Второй склад отпускал ежедневно по 18 *т*, поэтому за x дней со второго склада было выдано угля $18x$ (*т*). На втором складе осталось угля $237-18x$ (*т*). По условию задачи остаток угля на втором складе в полтора раза больше, чем на первом.

Составляем уравнение:

$$237 - 18x = \frac{3}{2}(185 - 15x),$$

$$2(237 - 18x) = 3(185 - 15x),$$

откуда

$$474 - 36x = 555 - 45x; \quad -36x + 45x = 555 - 474;$$
$$9x = 81; \quad x = 9.$$

Проверка. 1) За 9 дней было выдано угля: с первого склада $15 \cdot 9 = 135$ ($т$); со второго склада $18 \cdot 9 = 162$ ($т$); 2) осталось угля на первом складе $185 - 135 = 50$ ($т$); на втором складе $237 - 162 = 75$ ($т$); остаток угля на втором складе в полтора раза больше, чем на первом. Задача решена верно.

Ответ. 9 дней.

Задача 2. Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если к этому числу прибавить 63, то получится число, обозначенное теми же цифрами, но написанное в обратном порядке. Найти это число.

Решение. Обозначим число единиц в искомом числе x, тогда число десятков будет $11 - x$ и искомое число примет вид $(11-x)\,10+x$. Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, будет $10x + (11 - x)$.

Составим уравнение: $(11 - x)\,10 + x + 63 = 10x + 11 - x$, решение которого $x = 9$ даст единицы искомого числа. Число десятков составит $11 - x = 2$. Число будет 29.

Ответ. 29.

Задача 3. В трех ящиках имеется 64,2 $кг$ сахара. Во втором ящике находится $\frac{4}{5}$ того, что есть в первом, в третьем — $42\frac{1}{2}\%$ того, что есть во втором. Сколько сахара в каждом ящике?

Решение. Обозначим вес сахара в первом ящике (в $кг$) через x. Тогда вес сахара во втором ящике будет $\frac{4}{5}x$, или $0{,}8x$, а в третьем $0{,}8x \cdot \frac{42{,}5}{100} = 0{,}34x$.

Составим уравнение:

$$x + 0{,}8x + 0{,}34x = 64{,}2,$$

отсюда $x = 30$, тогда

$$\frac{4}{5}x = 24 \text{ и } 0{,}34x = 10{,}2.$$

Ответ. 30 $кг$, 24 $кг$ и 10,2 $кг$.

Задача 4. За семичасовый рабочий день токарь должен был по норме обточить некоторое количество деталей. Применив новый резец, токарь стал в каждый час обтачивать на 4 детали больше, чем полагалось в 1 *ч* по норме, а потому за 6 *ч* работы выполнил 1,2 дневной нормы. Сколько деталей в час обтачивает токарь, применяя новый резец?

Решение. Обозначим количество деталей, обрабатываемых токарем в 1 *ч*, буквой x. Тогда его дневная норма при семичасовом рабочем дне будет $7x$. С применением нового резца он обрабатывает за 1 *ч* $x+4$ деталей, за 6 *ч* работы он обрабатывает $6(x+4)$.

Составим уравнение: $6(x+4)=1{,}2\cdot 7x$; $x=10$; $x+4=14$.

Ответ. 14 деталей.

Задача 5. Двумя экскаваторами вырыли котлован для колхозной электростанции за 24 дня. Первым экскаватором можно было бы выполнить эту работу в $1\frac{1}{2}$ раза быстрее, чем вторым. За сколько дней каждым из экскаваторов отдельно можно выполнить всю работу?

Решение. Обозначим через x дней время, за которое первый экскаватор мог бы выполнить всю работу; $1{,}5x$ дней — время, за которое вторым экскаватором можно было бы выполнить всю работу. Первым экскаватором за 1 день выполняли $\frac{1}{x}$ часть работы; вторым экскаватором за 1 день выполняли $\frac{1}{1{,}5x}$ часть работы. Оба экскаватора за 1 день выполняли $\frac{1}{24}$ часть работы.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1{,}5x}=\frac{1}{24};\quad \frac{1}{x}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{24};$$

$$1\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{24};\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{24}:\frac{5}{3};\quad \frac{1}{x}=\frac{1\cdot 3}{24\cdot 5}=\frac{1}{40};\quad x=40.$$

Решение уравнения $x=40$ дает количество дней, в течение которых первым экскаватором можно было бы выполнить всю работу. Вторым экскаватором можно выполнить эту работу за $40\cdot 1{,}5=60$ дней.

Ответ. 40 дней и 60 дней.

Задача 6. Одной автомашиной можно перевезти некоторый груз за 18 *ч*, а второй — за 24 *ч*. Перевозку груза начали двумя машинами одновременно. Через несколько часов вторую машину перевели на другую работу, а остаток груза перевозили только первой автомашиной в течение 4 *ч*. Сколько часов работала первая автомашина?

Р е ш е н и е. Обозначим буквой x (*ч*) время, в течение которого работала вторая автомашина; x (*ч*) есть также время, в течение которого работали обе машины одновременно. За 1 *ч* первой машиной можно перевезти $\frac{1}{18}$ часть груза, а второй $\frac{1}{24}$. Двумя машинами за 1 *ч* перевезли $\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)$ часть груза, а за x часов $\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)x$—часть груза. Первая машина перевезла оставшийся груз за 4 *ч*, следовательно, за это время она перевезла $\frac{1}{18}\cdot 4=\frac{2}{9}$ частей груза.

Учитывая, что весь груз составляет условную единицу, получим уравнение:

$$\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)x+\frac{2}{9}=1.$$

Решение уравнения $x=8$ (*ч*) дает время совместной работы обеих машин. Тогда, первая машина работала $8+4=12$ (*ч*).

О т в е т. 12 *ч*.

З а д а ч а 7. Турист шел из деревни на железнодорожную станцию. Пройдя за первый час 3 *км*, он рассчитал, что, если будет двигаться с той же скоростью, то опоздает к поезду на 40 *мин*. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 *км/ч* и прибыл на станцию за 45 *мин* до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

Р е ш е н и е. Пусть расстояние от деревни до станции равно x (*км*). Если бы турист шел все время со скоростью 3 *км/ч*, то он потратил бы на путь $\frac{x}{3}$ *ч*, что на $\frac{2}{3}$ *ч* больше, чем было в его распоряжении. Таким образом, чтобы успеть точно к отходу поезда, он должен был потратить времени $\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$ *ч*. В действительности же он за первый час прошел 3 *км*, а оставшиеся $(x-3)$ *км* прошел со скоростью 4 *км/ч* за $\frac{x-3}{4}$ *ч*. Весь же путь он прошел за $1+\frac{x-3}{4}$ *ч*.

Принимая во внимание, что турист пришел за $\frac{3}{4}$ *ч* до отхода поезда, составим уравнение

$$\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}.$$

Решение уравнения $x=20$ и дает искомое расстояние.

О т в е т. 20 *км*.

Задача 8. Ежедневно в 12 *ч.* дня от пристани A к пристани B отправляется по реке пассажирский катер. Весь путь от A до B катер проходит без остановки со скоростью 12 *км/ч*. Затратив на стоянку у пристани B 2,5 *ч*, катер отправляется обратно и, пройдя весь путь без остановки со скоростью 15 *км/ч*, прибывает к пристани A в 19 *ч* того же дня. Найти расстояние от A до B.

Решение. Пусть расстояние от A до B равно x (*км*). Тогда время движения катера от A к B будет $\frac{x}{12}$ *ч*, а от B к A $\frac{x}{15}$ *ч*. Катер возвратился в пункт A через $19-12=7$ *ч*, из них 2,5 *ч* стоянка, поэтому он был в пути $7-2{,}5=4{,}5$ *ч*.

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{x}{12}+\frac{x}{15}=4{,}5,$$

решение которого $x=30$ (*км*) дает искомое расстояние.

Ответ. Расстояние между A и B 30 *км*.

Задача 9. Кусок железа и кусок меди весят вместе 1280 *г*, причем объем куска меди вдвое больше объема куска железа. Найти объем каждого куска, если удельный вес железа 7,8 *г/см*^{3}, а удельный вес меди 8,9 *г/см*^{3}.

Решение. Обозначим объем (в *куб. см*) куска железа через x, тогда объем куска меди равен $2x$. Вес железа $x\cdot 7{,}8$, а меди $2x\cdot 8{,}9$.

Составим уравнение: $7{,}8x+17{,}8x=1280$. Его решение $x=50$ дает объем куска железа. Тогда объем куска меди равен 100 *куб. см*.

Ответ. 50 *куб. см* и 100 *куб. см*.

Задача 10. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?

Решение. Обозначим буквой x вес первого сплава в *кг*, тогда вес второго будет $(8-x)$ *кг*. Золота в первом $\frac{2}{5}x$ *кг* и серебра $\frac{3}{5}x$ *кг*. В $(8-x)$ *кг* второго сплава содержится $\frac{3}{10}(8-x)$ *кг* золота и $\frac{7}{10}(8-x)$ *кг* серебра.

Составив уравнение по условию задачи, получим:

$$\left[\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)\right]:\left[\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}(8-x)\right]=5:11.$$

Его решение $x = 1$ (*кг*) дает вес первого сплава. Вес второго сплава $8 - x = 7$ (*кг*).

Ответ. 1 *кг* и 7 *кг*.

§ 19. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

1. Уравнение первой степени с двумя неизвестными. Если в уравнении с двумя неизвестными каждый член содержит только одно из неизвестных и при том в первой степени или же совсем не содержит неизвестных, то такое уравнение называется уравнением *первой степени с двумя неизвестными*. В общем виде оно записывается так: $ax + by = c$, где x и y — неизвестные числа, а коэффициенты a, b, c — известные (параметры).

Примеры таких уравнений:

$$5x - 2x + 3 = 2x + y - 1;$$

$$8x - 1{,}3y = 15; \quad \frac{2}{5}x + 0{,}7y = 3{,}4; \quad y = 4x - 9.$$

Любая пара допустимых значений x и y, удовлетворяющая уравнению, называется решением этого уравнения. Так, например, значения $x = 1$, $y = 14$ или $x = 2$, $y = 13$ будут решениями уравнения $x + y = 15$.

Одно уравнение с двумя неизвестными первой степени имеет бесконечное множество решений. Так, в уравнении $x + y = 15$ неизвестное x может принимать любые значения, и для каждого из них имеется соответствующее значение y, например:

$x_1 = 1$, $y_1 = 14$; $x_2 = 2$, $y_2 = 13$; $x_3 = 100$, $y_3 = -85$ и т. д.

Для уравнения первой степени с двумя неизвестными имеют место те же свойства, что и для уравнения с одним неизвестным (стр. 218). Используя их, каждое такое уравнение можно привести к нормальному виду (т. е. к виду $ax + by = c$).

Пример. $\overset{12}{\smile}{7} + \overset{3}{\smile}{\frac{x - 3y}{4}} = \overset{12}{\smile}{2x} - \overset{4}{\smile}{\frac{y + 5}{3}}$;

$$84 + 3(x - 3y) = 24x - 4(y + 5);$$
$$84 + 3x - 9y = 24x - 4y - 20;$$
$$3x - 9y - 24x + 4y = -20 - 84;$$
$$-21x - 5y = -104 \text{ или } 21x + 5y = 104.$$

2. Системы уравнений с двумя неизвестными. Если находят общие решения двух или нескольких уравнений, то говорят, что эти урав-

нения образуют *систему*. В системе уравнений каждое неизвестное означает одно и то же число во всех уравнениях.

Чтобы показать, что данные уравнения образуют систему, их обычно записывают одно под другим и объединяют фигурной скобкой, например

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x-y=10. \end{cases}$$

Каждая пара значений неизвестных, которая одновременно удовлетворяет обоим уравнениям системы, называется *решением системы*. Например, приведенную выше систему уравнений удовлетворяет пара чисел $x=15$, $y=5$. Это и есть решение данной системы. Других решений она не имеет. Существуют системы уравнений, имеющие бесконечное множество решений, а также системы, вовсе не имеющие решений. Система, не имеющая решений, называется *несовместимой*.

Примечание. Называть решение системы корнями нельзя.

Решить систему — это значит найти все решения этой системы или показать, что она не имеет их.

Две системы уравнений называются *равносильными* (эквивалентными), если все решения одной из них являются решениями другой и, наоборот, все решения другой системы являются решениями первой. Например, решением системы

$$\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x-y=9 \end{cases}$$

является пара чисел: $x=4$ и $y=3$. Эти же числа являются также решением системы

$$\begin{cases} 5x-3y=11, \\ x+8y=28. \end{cases}$$

(Это легко проверить, подставив значения $x=4$ и $y=3$ в оба уравнения системы). Следовательно, рассматриваемые системы уравнений равносильны.

Две несовместимые системы уравнений также считаются равносильными. Две равносильные системы уравнений могут состоять из одинакового и разного количества уравнений. В частности, система уравнений может быть равносильна одному уравнению. Понятие равносильности систем уравнений является относительным: две системы уравнений равносильны в одном числовом множестве и не равносильны — в другом.

Наиболее важным приемом решения систем уравнений является переход от данной системы к другой, равносильной данной, но более простой. Поэтому важно знать приемы получения новых систем уравнений, равносильных данной. В основе этих приемов лежат следующие теоремы.

3. Теоремы о равносильности систем уравнений первой степени.

Теорема 1. Любое из уравнений системы можно заменить равносильным ему уравнением; полученная в результате этого система будет равносильная данной.

Например, если в системе

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

заменить второе уравнение равносильным ему уравнением $9x + 6y = 57$, получим новую систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 9x + 6y = 57, \end{cases}$$

равносильную данной.

Теорема 2. Любое из уравнений системы можно заменить уравнением, полученным в результате алгебраического сложения обоих уравнений системы. Новая система будет равносильна данной.

Например, если первое уравнение в приведенной выше системе заменить таким образом, получим новую систему

$$\begin{cases} 5x - y = 23, \\ 3x + 2y = 19, \end{cases}$$

которая будет равносильна данной.

Теорема 3. Можно из одного уравнения системы выразить какое-нибудь неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение. Новое уравнение вместе с первым образует систему, равносильную данной.

Пусть, например, дано систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 33, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения неизвестное x через y

$$x = 2y + 1$$

и подставим это выражение в первое уравнение; получим

$$2(2y + 1) + 3y = 33.$$

Если к этому уравнению с одним неизвестным присоединить второе уравнение системы, получим новую систему

$$\begin{cases} 2(2y + 1) + 3y = 33, \\ x - 2y = 1, \end{cases}$$

равносильную данной.

На приведенных выше теоремах основаны различные способы решений систем уравнений. Ниже рассмотрим важнейшие из этих способов.

4. Решение систем уравнений способом алгебраического сложения. Если коэффициенты при каком-нибудь неизвестном в обоих уравнениях равны по абсолютной величине, то, складывая оба уравнения (или вычитая одно из другого), можно получить уравнение с одним неизвестным. Решая это уравнение, определяют одно неизвестное, а, подставляя его в одно из уравнений системы, находят второе неизвестное.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$$

Решение. Здесь коэффициенты при y по абсолютному значению равны между собой, но противоположны по знаку. Для получения уравнения с одним неизвестным уравнения системы почленно складываем:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$
$$5x = 20;\ x = 4.$$

Полученное значение $x = 4$ подставляем в какое-нибудь уравнение системы (например, в первое) и находим значение y:

$$2 \cdot 4 + y = 11,$$
$$y = 11 - 8,$$
$$y = 3.$$

Следовательно, система имеет решение: $x = 4$, $y = 3$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = 7, \\ x - 3y = -1. \end{cases}$$

Решение. Здесь коэффициенты при x равны между собой. Для получения уравнения с одним неизвестным уравнения системы почленно вычитают:

$$\begin{cases} -x + 5y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$
$$8y = 6,\ y = \frac{3}{4}.$$

Полученное значение $y = \frac{3}{4}$ подставляем в одно из уравнений системы (например, во второе) и находим значение x:

$$x - 3 \cdot \frac{3}{4} = 1;\ x - \frac{9}{4} = 1;\quad x = 3\frac{1}{4}.$$

Система уравнений имеет решение:

$$x = 3\frac{1}{4}, \quad y = \frac{3}{4}.$$

Если коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы разные по абсолютной величине, то в этом случае уравнивают абсолютные величины коэффициентов при одном из неизвестных, а затем поступают так же, как и в первом случае.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = -7. \end{cases}$$

Решение. Уравняем коэффициенты при x. Для этого умножим первое уравнение на 3, а второе на —2 и сложим полученные уравнения. Решение можно записать так:

$$\begin{array}{l|c|l} 4x + 3y = -4 & 3 & 12x + 9y = -12 \\ 6x + 5y = -7 & -2 & -12x - 10y = 14 \\ & & \hline & & -y = 2 \\ & & y = -2 \end{array}$$

$$4x + 3 \cdot (-2) = -4,$$
$$4x = 2, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $x = \frac{1}{2}, \quad y = -2.$

Аналогично можно решать и системы уравнений с буквенными коэффициентами.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2, \\ x + y = 2a \end{cases} \qquad (a + b \neq 0).$$

Решение.

$$\begin{array}{l|c|l} ax - by = a^2 + b^2 & b & ax - by = a^2 + b^2 \\ x + y = 2a & & bx + by = 2ab \\ & & \hline & & x(a + b) = (a + b)^2 \\ & & x = a + b\,^* \end{array}$$

$$a + b + y = 2a;$$
$$y = a - b.$$

Ответ. $x = a + b, \; y = a - b.$

* Если бы в условии не было отмечено, что $a+b\neq 0$, тогда следовало бы этот случай рассматривать отдельно. При $a+b=0$ полученное уравнение удовлетворяет любому значению x. В этом случае система имела бы бесчисленное множество решений: x — любое число, $y=2a-x$.

5. Решение систем способом подстановки. Если из одного уравнения системы какое-либо из неизвестных выразить через второе и подставить это выражение во второе уравнение, то получим уравнение с одним неизвестным. Из этого уравнения можно найти значение одного неизвестного, а из выражения, которое получили,— второго.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим

$$x = \frac{11 + 2y}{3}.$$

Подставив это значение во второе уравнение, получим уравнение с одним неизвестным — y:

$$4 \cdot \frac{11 + 2y}{3} - 5y = 3,$$

$$4(11 + 2y) - 15y = 9,$$

$$44 + 8y - 15y = 9; \quad -7y = -35; \quad y = 5.$$

Подставив $y = 5$ в выражение для x, получим:

$$x = \frac{11 + 2 \cdot 5}{3}; \quad x = 7.$$

Система имеет решение: $x = 7$, $y = 5$.

Некоторым видоизменением этого способа является способ сравнивания неизвестных. Чтобы решить систему этим способом, надо в каждом уравнении одно и то же неизвестное выразить через второе. Полученные таким образом разные выражения для этого неизвестного сравнивают одно с другим и получают уравнение с одним неизвестным. Решив это уравнение, находят значение одного неизвестного, затем второго.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y = -1. \end{cases}$$

Решение. Из двух уравнений выражаем x через y:

$$x = \frac{13 - 6y}{5}; \quad x = \frac{-1 - 18y}{7}.$$

Сравнивая эти выражения, получаем уравнение с одним неизвестным y:

$$\frac{13-6y}{5}=\frac{-1-18y}{7}.$$

Решаем это уравнение:

$$7(13-6y)=-5(1+18y);$$
$$91-42y=-5-90y;$$
$$48y=-96;\quad y=-2.$$

Неизвестное x найдем, подставив значение y в одно из выражений для x:

$$x=\frac{13-(-2)\cdot 6}{5}=5.$$

Таким образом, система имеет решение $x=5$, $y=-2$.

6. **Способ замены.** К системам двух линейных уравнений с двумя неизвестными можно приводить многие нелинейные системы. Это можно делать способом замены.

Пусть, например, надо решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9;\\[2ex] \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Заменим неизвестные, положив $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$; получим линейную систему:

$$\begin{cases}15u-7v=9;\\ 4u+9v=35,\end{cases}$$

которая имеет решение: $u=2$, $v=3$. Из соотношений $\frac{1}{x}=2$, $\frac{1}{y}=3$ находим $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$.

О т в е т. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$.

7. **Решение системы при помощи определителей.**

Решения системы вида

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

можно находить по формулам

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Эти формулы легко запомнить, если ввести следующие обозначения. Условимся выражение $ps - rq$ обозначать так: $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$. Это выражение называют *определителем*, или *детерминантом* второго порядка.

Итак,

$$\begin{vmatrix} pq \\ rs \end{vmatrix} = ps - rq.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

С помощью определителей решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

можно представить в удобном для запоминания виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Знаменатель здесь общий. Его называют *определителем системы* и обозначают знаком

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение: значение неизвестного равно дроби, знаменатель которой является определителем системы, а числитель — определителем, получающимся из определителя системы заменой коэффициентов при этом неизвестном свободными членами (правило Крамера).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение. Составляем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 3.$$

Применяем правило Крамера (так как $\Delta \neq 0$):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

8. Исследование системы уравнений. Исследуем, сколько решений может иметь система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Возможны следующие случаи:

а) $\Delta \neq 0$. Система в этом случае имеет единственное решение.

б) $\Delta = 0$ и по крайней мере один из определителей Δ_1 и Δ_2 отличен от нуля. Система не имеет решений.

в) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ и по крайней мере один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Система в этом случае имеет бесконечное множество решений.

Примеры последних двух случаев дают системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x + 6y = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

г) Все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Если хотя бы один из свободных членов c_1 и c_2 отличен от нуля, то система не имеет решений. Если $c_1 = c_2 = 0$, то система удовлетворяется тождественно произвольными значениями x и y.

§ 20. Системы линейных уравнений с тремя неизвестными

1. Уравнение первой степени с тремя неизвестными. Уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y, z в нормальном виде записывают так:

$$ax + by + cz = d.$$

Примеры. $10x + 10y + 8z = 164$; $2x - 3y + z = 7$.

Одно уравнение первой степени с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений. Действительно, взяв для x и y какие-либо произвольные числа, например, $x = 2$, $y = 5$ и подставив эти значения в уравнение $15x + 10y + 8z = 164$, получим $15 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 8z = 164$,

или $80 + 8z = 164$. Отсюда $z = 10\frac{1}{2}$. Дав другие произвольные значения x и y, получим другое значение для z и т. д.

2. Система двух уравнений с тремя неизвестными. Систему двух уравнений первой степени с тремя неизвестными в общем виде записывают так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

Вообще говоря, система двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесчисленное множество решений. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 64, \\ 2x + y + z = 14. \end{cases}$$

Выберем произвольное значение неизвестного x. Пусть $x = \frac{1}{4}$.

Подставив это значение в уравнения нашей системы, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5y + 4z = 63\frac{1}{4}, \\ y + z = 13\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $y = 9\frac{1}{4}$, $z = 4\frac{1}{4}$. Значит, данная система имеет решение $x = \frac{1}{4}$, $y = 9\frac{1}{4}$, $z = 4\frac{1}{4}$.

Взяв для x другое значение, получим новую систему с двумя неизвестными, из которой найдем y и z и т. д.

Однако можно привести пример системы, не имеющей ни одного решения, например

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5, \\ x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

Какие бы значения ни имели x, y, z, выражение $x - y + 2z$ не может одновременно быть равным 5 и 7.

3. Система трех уравнений с тремя неизвестными. Система трех уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Здесь x, y, z — неизвестные, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 — данные числа.

Все свойства уравнений с одним и двумя неизвестными справедливы и для системы уравнений с тремя неизвестными. Поэтому для решения данной системы применимы те же способы, что и для системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 15x + 10y + 8z = 164, \\ x + y + z = 16, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Решение. Исключаем x из первого и второго уравнений данной системы*. Для этого умножим обе части второго уравнения на 15:

$$\begin{cases} 15x + 15y + 15z = 240, \\ 15x + 10y + 8z = 164. \end{cases}$$

Коэффициенты при x равны. Вычтя из первого уравнения второе, получим $5y + 7z = 76$. Вместе с третьим уравнением оно дает систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5y + 7z = 76, \\ z = 2y, \end{cases}$$

решив которую найдем: $y = 4$, $z = 8$.

Подставляя эти значения в уравнения первое или второе, получаем $x = 4$. Следовательно, данная система трех уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение: $x = 4$, $y = 4$, $z = 8$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 7x + 6y + 7z = 100, \\ x - 2y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и прибавим его к первому:

$$\begin{array}{r} 7x + 6y + 7z = 100 \\ +\,3x - 6y + 3z = 0 \\ \hline 10x \qquad + 10z = 100 \end{array} \quad \text{или} \quad x + z = 10$$

Умножим третье уравнение на 2 и прибавим ко второму:

$$\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 6x + 2y - 4z = 0 \\ \hline 7x \qquad - 3z = 0 \end{array}$$

* Эту систему нетрудно также решить, подставив в двух первых уравнениях вместо z равное ему выражение $2y$.

Полученные два уравнения дают систему:

$$\begin{cases} x + z = 10, \\ 7x - 3z = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем: $x = 3$, $z = 7$.

Подставляя значения x и z в третье уравнение системы, получаем:

$$9 + y - 14 = 0, \quad y = 5.$$

Ответ. Система имеет единственное решение: $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

В ряде частных случаев, учитывая специфические свойства данной системы, можно применять приемы, упрощающие процесс решения.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c. \end{cases}$$

Решение. Складывая почленно все три уравнения и деля на 2, получаем

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Вычитая из него последовательно третье, второе и первое уравнения, находим:

$$x = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2};$$

$$y = \frac{a - b + c}{2}; \quad z = \frac{-a + b + c}{2}.$$

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0, \\ x + by + b^2z + b^3 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0, \end{cases}$$

где a, b, c — попарно различные числа.

Решение. Вычитая второе уравнение из первого, получаем:

$$(a - b)\,y + (a^2 - b^2)\,z + (a^3 - b^3) = 0.$$

Сократим на $a - b$ (так как $a \neq b$):

$$y + (a + b)\,z + (a^2 + ab + b^2) = 0.$$

Аналогично, вычитая из первого уравнения третье, находим:

$$y + (a + c)\,z + (a^2 + ac + c^2) = 0;$$

вычитая почленно полученные уравнения, исключаем y:

$$(b-c)z+(ab-ac+b^2-c^2)=0,$$

откуда $z=-(a+b+c)$. Тогда из уравнения $y+(a+b)z+(a^2+ab+b^2)=0$ получим $y=ab+bc+ac$, и, наконец, воспользовавшись первым уравнением системы, найдем $x=-abc$.

4. **Решение систем трех линейных уравнений с помощью определителей.** Определителем третьего порядка, составленным из таблицы девяти чисел

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix}$$

называется число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

Вычисление определителей третьего порядка можно проводить по следующему *правилу Саррюса*. Дописав к данной таблице первый и второй столбцы, составим произведение элементов, находящихся на

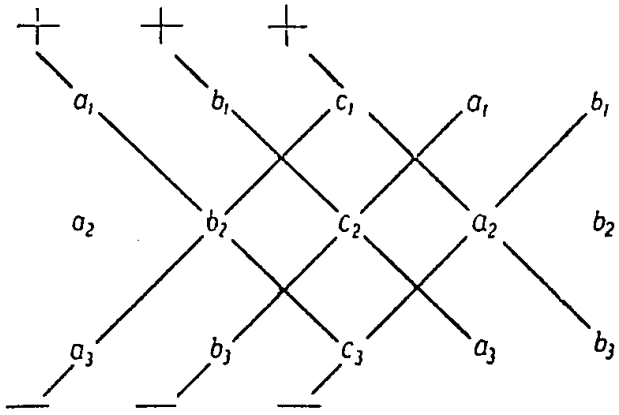


Рис. 21.

«главной диагонали» (рис. 21), а также элементов, находящихся на параллельных ей диагоналях, и возьмем эти произведения со своим знаком; составим произведение элементов, находящихся на «побочной диагонали», а также на параллельных ей диагоналях, и возьмем эти произведения с противоположным знаком. Алгебраическая сумма всех произведений равна Δ.

Можно вычислить определитель с помощью правила, называющегося *схемой треугольников* (рис. 22). На левом рисунке соединены места таблицы, для которых произведения элементов следует взять со своим знаком. На правом рисунке соединены те места таблицы, для которых произведения элементов следует брать с противоположным знаком.

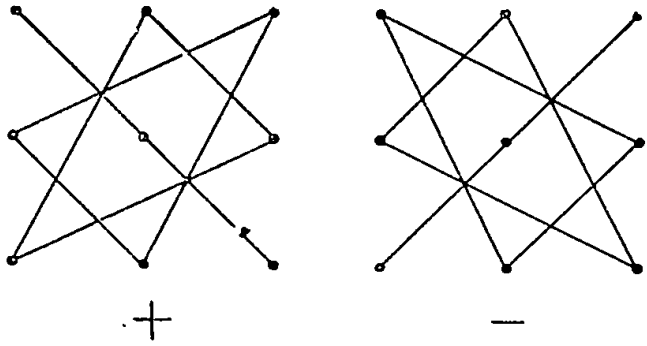


Рис. 22.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно правилу Саррюса, имеем

$$\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = \\ = -11.$$

Теперь рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Если система имеет решение, то это решение представляется в удобном для запоминания виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Обозначая определители, стоящие в числителе, соответственно через Δ_1, Δ_2, Δ_3 и определитель, стоящий в знаменателе, через Δ (определитель системы уравнений), решение системы уравнений запишем так:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Эти равенства выражают правило Крамера для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x+y+z=3,\\ x-y+3z=7,\\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=4\neq 0;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 7 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 7 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=0;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 7\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=8.$$

По правилу Крамера находим единственное решение системы:

$$x=\frac{4}{4}=1;\quad y=\frac{0}{4}=0;\quad z=\frac{8}{4}=2.$$

5. Исследование системы уравнений. Исследование системы производится в соответствии со следующими возможными случаями.

а) $\Delta\neq 0$. Система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

б) $\Delta=0$ и по крайней мере один из определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 отличен от нуля. В этом случае система не имеет решений или имеет их бесконечное множество *.

Пример. Исследовать систему

$$\begin{cases} x+2y-z=3,\\ 3x-y+2z=-1,\\ 11x+y+4z=0. \end{cases}$$

* Уточнения даются в курсах высшей алгебры, например Л. Я. Окунев. Высшая алгебра, Учпедгиз, 1958.

Р е ш е н и е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

О т в е т. Система не имеет решений.

Когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю, то система противоречива, т. е. не имеет решений (если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля) или удовлетворяется тождественно (если все свободные члены равны нулю).

6. **Однородные системы.** Система линейных уравнений называется гся *однородной*, если все свободные члены ее равны нулю. Однородная система трех уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases}$$

Однородная система не может быть противоречивой, так как она всегда имеет нулевое, или тривиальное, решение $x = y = z = 0$. Чтобы система однородных уравнений допускала решения, отличные от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

§ 21. Решение задач с помощью системы уравнений

З а д а ч а. На корм 8 лошадям и 15 коровам отпускали ежедневно 162 *кг* сена. Сколько сена ежедневно выдавали каждой лошади и каждой корове, если 5 лошадей съедали ежедневно сена на 3 *кг* больше, чем 7 коров?

Р е ш е н и е. Пусть для лошади отпускали ежедневно x *кг* сена,
а для коровы » » y » »

Тогда из первой части условия следует:

$$8x + 15y = 162,$$

а из второй части условия — еще одно уравнение:

$$5x - 7y = 3.$$

Решим систему этих уравнений:

$$\begin{cases} 8x + 15y = 162 \\ 5x - 7y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{|c} 5 \\ -8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 40x + 75y = 810 \\ -40x + 56y = -24 \end{array}$$

$$5x - 42 = 3, \qquad 131y = 786$$
$$x = 9. \qquad y = 6.$$

О т в е т. 9 *кг* и 6 *кг* сена.

Задача. Латунь состоит из сплава меди и цинка. Кусок латуни весом 124 *г* при погружении в воду «потерял» 15 *г*. Сколько в нем содержится меди и цинка отдельно, если известно, что 89 *г* меди «теряют» в воде 10 *г*, а 7 *г* цинка — 1 *г*.

Решение. Пусть в латуни было x граммов меди и y граммов цинка. Тогда $x+y=124$. Так как медь «теряет» $\frac{10}{89}$ своего веса, а цинк $\frac{1}{7}$, то x граммов меди потеряет $\frac{10}{89}x$, а y граммов цинка $\frac{1}{7}y$. Следовательно, $\frac{10}{89}x+\frac{1}{7}y=15$. Решив систему уравнений, получим: $x=89$, $y=35$.

Ответ. 89 *г* меди и 35 *г* цинка.

Задача. Пароход прошел 100 *км* по течению реки и 64 *км* против течения за 9 *ч*. В другой раз за это время он прошел 80 *км* против течения и 80 *км* по течению реки. Определить скорость парохода в стоячей воде и скорость течения реки.

Указание. Скорость движения по течению равна сумме собственной скорости парохода и скорости течения. Скорость движения против течения равна разности между собственной скоростью парохода и скоростью течения.

Решение. Принимаем собственную скорость парохода в *км/ч* за x, а скорость течения за y.

Используем табличную запись решения.

Этапы	Направление движения	Путь (*км*)	Скорость (*км/ч*)	Время (*ч*)	Израсходовано времени
Первый	По течению	100	$x+y$	$\frac{100}{x+y}$	9 *ч*
	Против течения	64	$x-y$	$\frac{64}{x-y}$	
Второй	Против течения	80	$x-y$	$\frac{80}{x-y}$	9 *ч*
	По течению	80	$x+y$	$\frac{80}{x+y}$	

Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{100}{x+y}+\frac{64}{x-y}=9, \\ \frac{80}{x+y}+\frac{80}{x-y}=9. \end{cases}$$

Это не линейная система, но способом замены ее можно привести к линейной. Обозначим

$$\frac{1}{x+y}=u,\quad \frac{1}{x-y}=v.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} 100u+64v=9 \\ 80u+80v=9 \end{cases}\quad\begin{array}{c|l} 5 & 500u+320v=45 \\ -4 & -320u-320v=-36 \\ \hline & 180u=9 \end{array}$$

$$u=\frac{1}{20}$$

$$80\cdot\frac{1}{20}+80v=9,$$

$$v=\frac{9}{80}-\frac{1}{20}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{20},\quad \frac{1}{x-y}=\frac{1}{16},$$

или

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x-y=16. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x=18$, $y=2$.

Ответ. 18 *км/ч* и 2 *км/ч*.

Задача. Два трактора различной мощности при совместной работе вспахали за 15 *ч* $\frac{1}{6}$ всего поля. Если бы первый трактор работал один 12 *ч*, а второй трактор — 20 *ч*, то они вспахали бы 20% всего поля. За сколько времени может вспахать все поле каждый трактор отдельно?

Решение. Площадь поля принимаем за единицу. Пусть первый трактор вспашет все поле за x часов, а второй — за y часов. Тогда производительность первого будет равна $\frac{1}{x}$, а второго $\frac{1}{y}$. По условию задачи имеем: $15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{6}$, $\frac{12}{x}+\frac{20}{y}=\frac{1}{5}$ $\left(\text{так как } 20\%=\frac{1}{5}\right)$. Решив систему уравнений, получим $x=360$, $y=120$.

Ответ. 360 *ч* и 120 *ч*.

Задача. Из двух мест, расстояние между которыми 650 *км*, отправляются два поезда навстречу друг другу. Если оба поезда тронутся с места одновременно, то они встретятся через 10 ч. Если же второй поезд отправится на 4 *ч* и 20 *мин* раньше первого, то встреча произойдет через 8 *ч* после отправления первого. Определить среднюю скорость каждого поезда.

Решение. Пусть скорость первого поезда x (*км/ч*), скорость второго y (*км/ч*), тогда в первом случае первый поезд пройдет до встречи $10x$ (*км*), второй $10y$ (*км*). Следовательно, $10x + 10y = 650$. Во втором случае первый поезд пройдет до встречи $8x$ (*км*), а второй, который шел $12\frac{1}{3}$ *ч*, пройдет $12\frac{1}{3}y$ (*км*). Следовательно, $8x + 12\frac{1}{3}y = 650$.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + 10y = 650, \\ 8x + 12\frac{1}{3}y = 650, \end{cases}$$

получим: $x = 35$, $y = 30$.

Ответ. 35 *км/ч* и 30 *км/ч*.

Задача. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций A и B, расстояние между которыми 600 *км*. Первый из них приходит на станцию B на 3 *ч* раньше, чем второй на станцию A. В то время как первый проходит 250 *км*, второй пройдет 200 *км*. Найти скорость каждого поезда.

Решение. Пусть скорость первого поезда x (*км/ч*), второго y (*км/ч*). Расстояние в 600 *км* первый поезд проходит за $\frac{600}{x}$ *ч*, а второй — за $\frac{600}{y}$ *ч*. Согласно условию, запишем систему уравнений

$$\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}, \quad \frac{250}{x} = \frac{200}{y},$$

решив которую получим $x = 50$ (*км/ч*); $y = 40$ (*км/ч*).

Ответ. 50 *км/ч* и 40 *км/ч*.

Задача. Расстояние между селами по шоссе 19 *км*. Из села A в село B выехал велосипедист с некоторой постоянной скоростью; через 15 *мин* после него в том же направлении выехал автомобилист. Через 10 *мин* после выхода он нагнал велосипедиста и продолжал путь до B, где, не останавливаясь, повернул обратно и через 50 *мин* после своего выхода из A встретил велосипедиста вторично. Определить скорости автомобиля и велосипедиста.

Решение. Пусть скорость велосипедиста x (*км/мин*), автомобилиста—y (*км/мин*). Автомобилист пробыл в пути 10 *мин*, а велосипедист $10 + 15 = 25$ (*мин*), когда его догнал автомобилист. В этот момент расстояния, пройденные ими, были одинаковы. Следовательно, $25x = 10y$. Когда на обратном пути автомобилист встретил велосипедиста, автомобилист прошел уже $50y$ (*км*), а велосипедист $65x$ (*км*). Эти расстояния в сумме дают двойное расстояние между селами A и B. Поэтому $65x + 50y = 38$. Решив систему уравнений $25x = 10y$ и $65x + 50y = 38$, найдем: $x = 0{,}2$ (*км/мин*), $y = 0{,}5$ (*км/мин*);

Ответ. 0,5 *км/мин* и 0,2 *км/мин*.

Задача. По окружности движутся два тела; первое пробегает окружность на 5 *сек* скорее второго. Когда они движутся по одному направлению, то встречаются через каждые 100 *сек*. Какую часть окружности (в градусах) пробегает каждое тело в 1 *сек*?

Решение. Пусть в 1 *сек* первое тело пробегает дугу в x (градусов), а второе y (градусов). Из первого условия находим $\frac{360}{y} - \frac{360}{x} = 5$. Каждую секунду расстояние между телами (по дуге) увеличивается на $x - y$ (градусов). За время, протекающее от одной встречи к другой (т. е. за 100 *сек*), расстояние должно увеличиться на 360°. Поэтому $100(x - y) = 360$. Полученная система имеет два решения $x_1 = 18$, $y_1 = 14{,}4$; $x_2 = -14{,}4$, $y_2 = -18$. Оба они пригодны, но физический смысл их один и тот же (меняются только номера тел и направление движения).

Ответ. Первое тело за 1 *сек* пробегает 18°, второе 14° 24′.

Задача. Велосипедист прибыл из пункта A в пункт B в назначенное время, двигаясь с определенной скоростью. Если бы он увеличил эту скорость на 3 *км/ч*, то прибыл бы на место на час раньше срока, а если бы он проезжал в час на 2 *км* меньше, чем в действительности, то он опоздал бы на час. Определить расстояние между пунктами A и B, скорость велосипедиста и время его движения.

Решение. Неизвестное расстояние обозначим через S, скорость велосипедиста v и время его движения t.

Этапы	Путь (*км*)	Скорость (*км/ч*)	Время (*ч*)
Первый	S	v	t
Второй	S	$v + 3$	$t - 1$
Третий	S	$v - 2$	$t + 1$

Используем табличную запись решения.

Имеем систему трех уравнений (нелинейных) с тремя неизвестными

$$\begin{cases} vt = S, \\ (v + 3) \cdot (t - 1) = S, \\ (v - 2) \cdot (t + 1) = S. \end{cases}$$

Эту систему можно привести к системе линейных уравнений:

из $vt = (v + 3) \cdot (t - 1)$ и $vt = (v - 2) \cdot (t + 1)$

следует $\begin{cases} -v + 3t = 3, \\ v - 2t = 2. \end{cases}$

Решив эту систему уравнений, получим $t = 5$, $v = 12$. Тогда $S = 12 \cdot 5 = 60$ (*км*).

Ответ. 60 *км*, 12 *км/ч*, 5 *ч*.

§ 22. Квадратные уравнения

1. Общие понятия. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестное, а коэффициенты a, b и c — данные числа, называется *квадратным уравнением*. В квадратном уравнении $a \neq 0$, так как в противном случае оно было бы уравнением первой степени: $bx + c = 0$. В то же время a может быть и положительным, и отрицательным. Если $a < 0$, то умножив обе части уравнения на -1, получим уравнение с положительным коэффициентом при x^2. Коэффициент c называется свободным членом, ax^2 — старшим членом, bx — членом, содержащим первую степень неизвестного.

Если $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *полным квадратным уравнением общего вида*.

Разделив все члены его на a ($a \neq 0$), получим

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Полагая $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, имеем уравнение

$$x^2 + px + q = 0,$$

которое называется полным квадратным уравнением приведенного вида или *приведенным квадратным уравнением*. Если же хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то квадратное уравнение называется неполным. Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

а) если $b = 0$, $c \neq 0$, то $ax^2 + c = 0$;
б) » $b \neq 0$, $c = 0$, то $ax^2 + bx = 0$;
в) » $b = 0$, $c = 0$, то $ax^2 = 0$.

2. Решение неполных квадратных уравнений. а) Уравнения вида $ax^2 + c = 0$ и $ax^2 = 0$.

Чтобы решить уравнение вида $ax^2 + c = 0$, переносим свободный член в правую часть и находим значение x^2 и $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Если коэффициенты a и c одного знака, то уравнение $ax^2 + c = 0$ в области действительных членов не имеет решений, так как

квадрат действительного числа не может быть равный отрицательному числу $-\frac{c}{a}$. Если же a и c противоположных знаков, то уравнение $ax^2+c=0$ всегда имеет два корня, которые являются противоположными числами.

Пример. Решить уравнение.

$$2x^2-32=0.$$

Решение.

$$2x^2=32,$$
$$x^2=16,$$
$$x=\pm\sqrt{16}=\pm 4.$$

Ответ. $x_1=4$, $x_2=-4$.

Пример. Решить уравнение $2x^2+8=0$.

Решение. $x^2=-4$.

В области действительных чисел уравнение не имеет решения.

Если a и c противоположных знаков, то уравнение $ax^2+c=0$ можно решить и путем разложения на множители.

Пример.

$$4x^2-9=0,\quad (2x-3)(2x+3)=0;$$
$$2x-3=0,\quad x_1=\frac{3}{2};$$
$$2x+3=0,\quad x_2=-\frac{3}{2}.$$

Уравнение $ax^2=0$ имеет равные между собой корни: $x_1=0$, $x_2=0$.

б) Уравнение вида $ax^2+bx=0$. Чтобы решить уравнение $ax^2+bx=0$, надо его левую часть разложить на множители: $x(ax+b)=0$. Тогда или $x=0$, или $ax+b=0$, откуда $x=-\frac{b}{a}$.

Итак, уравнение $ax^2+bx=0$ имеет два корня:

$$x_1=0,\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

Пример 1. Решить уравнение $x^2-12x=0$.

Решение.

$$x(x-12)=0,\quad x_1=0,$$
$$x-12=0,\quad x_2=12.$$

Пример 2. Решить уравнение $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$.

Решение.

$$47 - 3x^2 - 4x = 34 - 4x - 62; \quad 47 - 3x^2 + 28 = 0,$$

$$3x^2 = 75; \quad x^2 = 25; \quad x = \pm\sqrt{25}; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = -5.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3.$$

Решение.

$$\frac{\overset{5}{\smile}}{\frac{5x^2 + 9}{6}} - \frac{\overset{6}{\smile}}{\frac{4x^2 - 9}{5}} = \overset{30}{\smile}{3},$$

$$25x^2 + 45 - 24x^2 + 54 = 90; \quad x^2 + 99 = 90; \quad x^2 + 9 = 0.$$

Ответ. Уравнение не имеет решений (в области действительных чисел).

Пример 4. Решить уравнение $10(x - 2) + 19 = (5x - 1)(1 + 5x)$.

Решение.

$$10(x - 2) + 19 = (5x - 1)(1 + 5x),$$

$$10x - 20 + 19 = 25x^2 - 1, \quad 10x - 25x^2 = 0;$$

$$5x(2 - 5x) = 0; \quad x_1 = 0, \quad 2 - 5x = 0, \quad x_2 = \frac{2}{5}.$$

Ответ. $x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{5}$.

3. Приведенное квадратное уравнение. а) Решение квадратного уравнения путем выделения полного квадрата двучлена. Пусть надо решить уравнение $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Разложим левую часть на множители, выделив из выражения $x^2 + 14x + 24$ полный квадрат двучлена. Первый член есть квадрат числа x (первого числа), второй член $(14x)$ можно рассматривать, как удвоенное произведение первого числа x на второе число, равное 7, так как $14x = 2 \cdot x \cdot 7$. Чтобы получить полный квадрат двучлена, прибавим квадрат второго числа $7^2 = 49$, а чтобы численное значение не изменилось, вычтем это же число 49. Получим:

$$(x^2 + 14x + 49) - 49 + 24 = 0, \text{ или } (x + 7)^2 - 25 = 0.$$

Разложив левую часть на множители, получим

$$(x + 7 + 5)(x + 7 - 5) = 0, \text{ или } (x + 12)(x + 2) = 0.$$

Итак, уравнение $x^2+14x+24=0$ равносильно такому:

$$(x+12)(x+2)=0,$$

отсюда

$$(x+2)=0;\quad x_1=-2;\quad x+12=0:\quad x_2=-12.$$

Пример. Решить уравнения путем выделения полного квадрата двучлена:

а) $x^2+8x-33=0$; б) $x^2-11x+30=0$.

Решение.

$$\text{а)}\ x^2+2\cdot 4\cdot x+16-16-33=0,\ \text{или}$$
$$(x+4)^2-49=0,\quad (x+4-7)(x+4+7)=0,$$
$$(x-3)(x+11)=0.$$

Отсюда

$$x-3=0,\quad x_1=3;\quad x+11=0,\quad x_2=-11.$$

$$\text{б)}\ x^2-2\cdot\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}-\frac{121}{4}+30=0;\quad \left(x-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(x-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)=0;\quad (x-6)(x-5)=0.$$

Отсюда $x-6=0,\quad x_1=6;\quad x-5=0,\quad x_2=5$.

б) Формула корней приведенного квадратного уравнения. С помощью выделения полного квадрата двучлена в уравнении $x^2+px+q=0$ при любых p и q получают общую формулу для корней приведенного квадратного уравнения:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

выражающую зависимость корней от коэффициентов.

Формула читается так: *корень приведенного квадратного уравнения равен половине коэффициента при неизвестном в первой степени, взятом с противоположным знаком, плюс — минус квадратный корень из квадрата половины этого коэффициента без свободного члена.*

По этой формуле можно определить действительные корни приведенного уравнения только в случае, когда выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ (оно называется *дискриминантом* приведенного квадратного уравнения) неотрицательно, т. е. когда $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant 0$. Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$, то данное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два разных корня.

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, то оба корня равны: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Рассмотрим на примерах, как с помощью этой формулы решать уравнения.

Пример 1. Решить уравнения:

$$\text{а) } x^2 - 4x - 60 = 0;$$

$$\text{б) } x^2 - \frac{5}{3}x - 26 = 0.$$

Решение.

а) Здесь $p = -4$, $q = -60$. По формуле имеем:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - (-60)} = 2 \pm \sqrt{64} = 2 \pm 8; \quad x_1 = 2 + 8 = 10;$$
$$x_2 = 2 - 8 = -6.$$

б) Здесь $p = -\frac{5}{3}$, $q = -26$. По формуле имеем:

$$x = -\frac{-\frac{5}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{5}{3}}{2}\right)^2 - (-26)} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{26\frac{25}{36}} =$$
$$= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{961}{36}} = \frac{5}{6} \pm \frac{31}{6}; \quad x_1 = \frac{5}{6} + \frac{31}{6} = 6, \quad x_2 = \frac{5}{6} - \frac{31}{6} =$$
$$= -4\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 2mx - 2(mn + 0{,}5n^2) = 0$.

Решение. Здесь $p = 2m$, $q = -2\left(mn + \frac{1}{2}n^2\right)$. По формуле имеем:

$$x = -m \pm \sqrt{m^2 + 2\left(mn + \frac{1}{2}n^2\right)} = -m \pm \sqrt{m^2 + 2mn + n^2} =$$
$$= -m \pm \sqrt{(m+n)^2} = -m \pm |m+n|; \quad x_1 = -m + (m+n) = n;$$
$$x_2 = -m - (m+n) = -2m - n.$$

Примечание. Формулы $\pm |m+n|$ и $\pm (m+n)$ дают одинаковые пары чисел, поэтому в данном случае вместо $-m \pm |m+n|$ можно писать $-m \pm (m+n)$.

Дальше дано несколько примеров на исследование квадратных уравнений приведенного вида.

Пример 1: Не решая следующих уравнений, определить, какие из них имеют два различных корня или не имеют корней (действительных).

а) $x^2 - 4x + 4 = 0$; б) $x^2 - 2x + 5 = 0$; в) $x^2 + 16 + 48 = 0$.

Решение. а) Здесь $p = -4$, $q = 4$; $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4 = 0$, следовательно, уравнение имеет два равных корня.

б) Здесь $p = -2$ и $q = 5$, так как $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 5 < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

в) Здесь $p = 16$ и $q = 48$, так как $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{16}{2}\right)^2 - 48 > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня.

Пример 2. При каком значении k уравнение $x^2 + kx + 15 = 0$ имеет корень, равный 5.

Решение.

$$5^2 + k \cdot 5 + 15 = 0; \quad 25 + 5k + 15 = 0, \quad 5k = -40; \quad k = -8.$$

Ответ. При $k = -8$.

Пример 3. При каких значениях a следующие уравнения имеют по два равных действительных корня:

а) $x^2 + ax + 9 = 0$; б) $x^2 + 12x + a = 0$;

в) $x^2 + 2(a - 4)x + a^2 + 6a + 3 = 0$.

Решение. а) Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет равные корни при условии $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$. В нашем случае $p = a$, $q = 9$. Следовательно,

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 9; \quad a^2 = 36, \quad a = \pm 6.$$

б) $p = 12$, $q = a$; $\left(\frac{12}{2}\right)^2 = a$, $a = 36$.

в) $p = 2(a - 4)$, $q = a^2 + 6a + 3$; $(a - 4)^2 = a^2 + 6a + 3$,

$$a^2 - 8a + 16 = a^2 + 6a + 3, \quad 14a = 13, \quad a = \frac{13}{14}.$$

4. Полное квадратное уравнение общего вида. Квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно решать по формуле корней приведенного уравнения, если данное уравнение предварительно разде-

лить на a ($a \neq 0$). Однако можно пользоваться и специальной формулой:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Эта формула читается так: *корень полного квадратного уравнения общего вида равен дроби, числителем которой есть коэффициент при неизвестном в первой степени, взятый с противоположным знаком, плюс или минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения коэффициента при неизвестном второй степени на свободный член, а знаменателем есть удвоенный коэффициент при неизвестном второй степени.*

Выражение $b^2 - 4ac$, входящее в этой формуле под радикал, называют *дискриминантом* квадратного уравнения общего вида.

Если $b^2 - 4ac > 0$, уравнение имеет два разных действительных корня.

Если $b^2 - 4ac = 0$, уравнение имеет два одинаковых корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, уравнение не имеет корней (действительных).

На следующих примерах показано, как можно применять общую формулу корней для решения квадратных уравнений.

Пример. Решить уравнение $3x^2 + 11x + 6 = 0$.

Решение. Здесь $a = 3$, $b = 11$, $c = 6$. По формуле имеем:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{6} =$$

$$= \frac{-11 \pm 7}{6}; \quad x_1 = \frac{-11 + 7}{6} = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{-11 - 7}{6} = -3.$$

Пример. Решить уравнение

$$3x + \frac{(x-3)^2}{4} = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(x+1)(x-1)}{3}.$$

Решение.

$$72x + 6(x^2 - 6x + 9) = 3(x^2 + 6x + 9) + 8(x^2 - 1);$$

$$72x + 6x^2 - 36x + 54 = 3x^2 + 18x + 27 + 8x^2 - 8;$$

$$-5x^2 + 18x + 35 = 0, \quad 5x^2 - 18x - 35 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 700}}{10} = \frac{18 \pm \sqrt{1024}}{10} = \frac{18 \pm 32}{10}; \quad x_1 = 5; \; x_2 = -1{,}4.$$

Примечание. По общей формуле можно решать также и квадратные уравнения приведенного вида.

Если b — четное число, то лучше представить общую формулу в виде

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Пример. Решить уравнения:

а) $3x^2 - 14x - 80 = 0$; б) $ax^2 - 2(a+b)x + 4b = 0$.

Решение. а) Здесь $a = 3$, $b = -14$, $c = -80$. Подставив в формулу значения коэффициентов, получим

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 3 \cdot 80}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{3} = \frac{7 \pm 17}{3}; \quad x_1 = 8; \quad x_2 = -\frac{10}{3}.$$

б) По формуле имеем:

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{a} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{a} =$$

$$= \frac{a + b \pm (a-b)^*}{a};$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2b}{a}.$$

Пример. Не решая уравнений, определить, сколько действительных корней имеет каждое из них:

а) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; б) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Решение. а) $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 36 - 144 < 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

б) $(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 > 0$. Уравнение имеет два действительных различных корня.

Пример. При каком значении k уравнение $kx^2 + 12x - 3 = 0$ имеет корень, равный $\frac{1}{5}$?

Решение.

$$k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 12 \cdot \frac{1}{5} - 3 = 0, \quad \frac{k}{25} + \frac{12}{5} - 3 = 0,$$

$$k + 60 - 75 = 0, \quad k = 15.$$

---

* См. примечание на стр. 253.

Пример. При каком значении a уравнение

$$ax^2 + 4x + 1 = 0.$$

имеет два равных корня?

Решение. Уравнение имеет два равных корня при условии, что его дискриминант равен нулю. В нашем случае $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 0$, откуда $a = 4$.

5. Зависимость между коэффициентами и корнями квадратного уравнения. Между коэффициентами и корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ существуют такие зависимости:

а) *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятом с противоположным знаком*, т. е.

$$x_1 + x_2 = -p.$$

б) *Произведение корней этого уравнения равно свободному члену*, т. е.

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Эти зависимости известны под названием *теоремы Виета*.

Примеры. а) Уравнение $x^2 + 2x - 80 = 0$ имеет корни $x_1 = 8$, $x_2 = -10$, $x_1 + x_2 = 8 - 10 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = 8(-10) = -80$.

б) Уравнение $x^2 + 9x + 14 = 0$ имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = -7$, $x_1 + x_2 = -2 + (-7) = -9$; $x_1 x_2 = (-2)(-7) = 14$.

Правильно и обратное утверждение: если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна $-p$, а их произведение равно q, то эти числа являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Для случая полного квадратного уравнения неприведенного вида существуют зависимости:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Например, уравнение $4x^2 + 25x - 21 = 0$ имеет корни:

$$x_1 = -7, \quad x_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_1 + x_2 = -7 + \frac{3}{4} = -\frac{25}{4}, \quad x_1 x_2 = (-7) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{21}{4}.$$

Эти утверждения дают возможность составлять квадратные уравнения, которые имели бы наперед заданные корни, а также решать много других задач на составление и исследование квадратных уравнений.

Пример 1. Составить квадратное уравнение, имеющее корни 5 и -6.

Решение. Здесь $x_1 + x_2 = 5 + (-6) = -1$, $x_1x_2 = 5(-6) = -30$; следовательно, $p = 1$, $q = -30$. Получаем уравнение

$$x^2 + x - 30 = 0.$$

Пример 2. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратными корням уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение. Перепишем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ так: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ и пусть его корнями будут x_1 и x_2. Тогда

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

По условию, корнями искомого уравнения будут $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$. Чтобы получить его коэффициенты, вычислим

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}.$$

Уравнение будет иметь вид:

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

или

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

Пример 3. Не решая уравнение $x^2 + px + q = 0$, выразить сумму квадратов его корней через p и q.

Решение. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - \\ -2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Пример 4. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 3x + m = 0$. При каком значении m разность корней данного уравнения будет равна 6?

Решение. Имеем:

$$x_1 + x_2 = -3, \quad x_1x_2 = m,$$

отсюда

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 9; \\ -4x_1x_2 = -4m.$$

Складывая почленно равенства, получаем

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 9 - 4m,$$

или

$$(x_1 - x_2)^2 = 9 - 4m.$$

Тогда $6^2 = 9 - 4m$, значит $m = \frac{-27}{4}$.

§ 23. Задачи на составление квадратных уравнений

Задача 1. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 *м* больше другой, требуется обнести изгородью. Определить длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 *кв. м*.

Решение. Пусть одна сторона прямоугольника x, тогда другая будет $x + 10$. По условию имеем:

$$x(x + 10) = 1200.$$

Следовательно, получили квадратное уравнение:

$$x^2 + 10x - 1200 = 0.$$

Решая его, получаем:

$$x_1 = 30, \quad x_2 = -40.$$

Второе решение уравнения не принимаем во внимание, так как длина стороны прямоугольника не может выражаться отрицательным числом. Поэтому длина изгороди

$$2x + 2(x + 10) = 2 \cdot 30 + 2(30 + 10) = 140 \ (м).$$

Ответ. 140 *м*.

Задача 2. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить в несколько дней 216 *куб. м* дров. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 *куб. м* сверх плана. Поэтому уже за день до срока было заготовлено 232 *куб. м* дров. Сколько дров в день должна была заготовить бригада по плану?

Решение. Количество дров, которое должна заготовить бригада за 1 день по плану, принимаем за x (*куб. м*). Первые три дня бригада заготовила $3x$ (*куб. м*). Остальные дни она заготовляла по $x + 8$ (*куб. м*). По плану она должна работать $\frac{216}{x}$ (дней); с производительностью $x + 8$ (*куб. м*) в день она работала $\frac{232 - 3x}{x + 8}$ (дней). Согласно условию задачи, имеем:

$$\frac{232 - 3x}{x + 8} + 3 + 1 = \frac{216}{x}, \text{ или } \frac{232 - 3x}{x + 8} + 4 = \frac{216}{x}.$$

После преобразования получаем уравнение $x^2 + 48x - 1728 = 0$. Его корни $x_1 = 24$, $x_2 = -72$. Следовательно, бригада в день должна была заготовлять по плану 24 *куб. м*.

Ответ. 24 *куб. м*.

Задача 3. Два автомобиля выходят из одного города в другой. Скорость первого на 10 *км/ч* больше скорости другого, и поэтому первый автомобиль приходит на место на 1 *ч* раньше второго. Определить скорость обоих автомобилей, если известно, что расстояние между городами 560 *км*.

Решение. Принимаем скорость второго автомобиля за x (*км/ч*). Тогда скорость первого будет $x + 10$ (*км/ч*). Значит, время движения первого автомобиля будет $\frac{560}{x}$; время движения второго равно $\frac{560}{x+10}$.

По условию задачи первое из этих чисел на 1 больше второго. Следовательно,

$$\frac{560}{x} - 1 = \frac{560}{x + 10}.$$

После преобразований имеем: $x^2 - 10x + 5600 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Отбрасывая второй корень, так как скорость не может быть отрицательной, получаем: скорость первого автомобиля 70 *км/ч*. Тогда скорость второго равна 80 *км/ч*.

Ответ. 70 *км/ч* и 80 *км/ч*.

Задача 4. Теплоход прошел по течению реки 48 *км* и столько же против течения и потратил на весь путь 5 *ч*. Определить скорость теплохода в стоячей воде, если считать скорость течения реки 4 *км/ч*.

Решение. Скорость теплохода в стоячей воде принимаем за x (*км/ч*). Тогда его скорость по течению реки будет $x + 4$ (*км/ч*), а скорость против течения $x - 4$ (*км/ч*). Значит, он пройдет по течению 48 *км* за $\frac{48}{x+4}$ *ч* и против течения за $\frac{48}{x-4}$ *ч*. По условию задачи получаем:

$$\frac{48}{x-4} + \frac{48}{x+4} = 5.$$

После преобразования получаем уравнение $5x^2 - 96x - 80 = 0$. Его корни: $x_1 = 20$, $x_2 = -\frac{4}{5}$. Значит, скорость теплохода в стоячей воде была 20 *км/ч*.

Ответ. 20 *км/ч*.

Задача 5. Из пункта A отправили по течению реки плот. Через 5 *ч* 20 *мин* вслед за плотом из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 *км*. С какой скоростью

(в *км/ч*) проходил плот, если моторная лодка шла быстрее его на 12 *км/ч*?

Решение. Скорость плота принимаем за x (*км/ч*), тогда скорость моторной лодки будет $x+12$ (*км/ч*). Время, в течение которого моторная лодка догнала плот (к этому моменту она прошла 20 *км*), будет: $\frac{20}{x+12}$ *ч*. Плот пройдет 20 *км* за $\frac{20}{x}$ *ч*. Но плот плыл на $5\frac{1}{3}$ *ч* дольше, чем лодка. Тогда

$$\frac{20}{x+12}+5\frac{1}{3}=\frac{20}{x}.$$

После преобразований получаем уравнение $x^2+12x-45=0$. Его корни $x_1=3$, $x_2=-15$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Следовательно, плот плыл со скоростью 3 *км/ч*.

Ответ. 3 *км/ч*.

Задача 6. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 *км*, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью. Первый велосипедист прибывает в пункт B на 35 *мин* раньше, чем второй в пункт A. Определить скорость каждого велосипедиста.

Решение. Расстояние между пунктами A и B представим отрезком AB и предположим, что велосипедисты встретились в точке C (рис. 23).

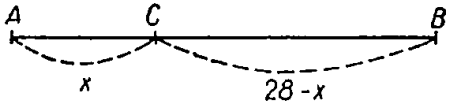


Рис. 23.

Обозначим расстояние AC (в *км*) через x. Тогда расстояние CB (в *км*) будет $28-x$. Из условия задачи следует, что скорость первого велосипедиста x *км/ч*, а второго $(28-x)$ *км/ч*. Первый прошел расстояние 28 *км* за $\frac{28}{x}$ *ч*, а второй за $\frac{28}{28-x}$ *ч*.

Принимая во внимание, что первый велосипедист прибывает в пункт B на 35 *мин* $\left(\frac{7}{12}\text{ ч}\right)$ раньше, чем второй в пункт A, получаем уравнение:

$$\frac{28}{28-x}-\frac{7}{12}=\frac{28}{x}.$$

После преобразований уравнение примет вид: $x^2 + 68x - 1344 = 0$. Его корни: $x_1 = 16$, $x_2 = -84$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Получаем, соответственно, скорости велосипедистов 16 и 12 *км/ч*.

Ответ. 16 *км/ч* и 12 *км/ч*.

Задача 7. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 24 *км*, отправились в одно и то же время два автомобиля навстречу друг другу. После их встречи автомобиль, вышедший из пункта A, приходит в пункт B через 16 *мин*, а другой автомобиль приходит в пункт A через 4 *мин*. Определить скорость каждого автомобиля.

Решение. Изобразим расстояние от A до B отрезком AB и предположим, что автомобили встретились в точке C (рис. 24).

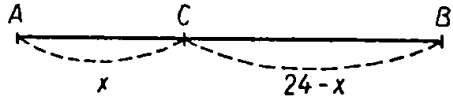


Рис. 24.

Обозначим расстояние AC через x (в *км*). Тогда расстояние CB (в *км*) будет $24 - x$. Так как 4 *мин* $= \frac{1}{15}$ *ч*, а 16 *мин* $= \frac{4}{15}$ *ч*, то скорость автомобиля, вышедшего из пункта A, равна $\frac{24 - x}{\frac{4}{15}} = \frac{15(24 - x)}{4}$ (*км/ч*). Скорость автомобиля, вышедшего из пункта B, равна $x : \frac{1}{15} = 15x$ (*км/ч*).

До встречи первый автомобиль шел $x : \frac{15(24-x)}{4} = \frac{4x}{15(24-x)}$ (*ч*); второй — $(24 - x) : 15x = \frac{24 - x}{15x}$ (*ч*). До встречи они шли одно и то же время, поэтому

$$\frac{4x}{15(24 - x)} = \frac{24 - x}{15x}.$$

После преобразования получаем уравнение $x^2 + 16x - 192 = 0$. Его корни $x_1 = 8$, $x_2 = -24$.

Отрицательный корень отбрасываем. Значит, расстояние равно 8 *км*. Тогда скорости автомобилей: первого $\frac{15(24-8)}{4}=60$ (*км/ч*); второго $15\cdot 8=120$ (*км/ч*).

Ответ. 60 *км/ч* и 120 *км/ч*.

Задача 8. За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $^2/_3$ колхозного поля. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать все поле на 5 дней скорее, чем вторым трактором?

Решение. Работу принимаем за единицу. Предполагаем, что вторым трактором можно вспахать все поле за x дней, тогда первым трактором можно вспахать все поле за $x-5$ дней. Значит, за 4 дня второй трактор вспашет $\frac{1}{x}\cdot 4=\frac{4}{x}$ часть поля, первый $\frac{1}{x-5}\cdot 4=\frac{4}{x-5}$ часть. Так как это составит $^2/_3$ всего поля, то получаем уравнение $\frac{4}{x}+\frac{4}{x-5}=\frac{2}{3}$. После преобразования это уравнение примет вид: $x^2-17x+30=0$. Его корни $x_1=15$, $x_2=2$. Второй корень не отвечает условию задачи, так как $2-5=-3$.

Значит, второй трактор может вспахать все поле за 15 дней, а первый — за 10 дней.

Ответ. 10 дней и 15 дней.

Задача 9. Колхоз купил для заправки тракторов на a рублей лигроина и на такую же сумму керосина, всего n *кг*. Сколько килограммов куплено лигроина и сколько керосина, если килограмм первого на b рублей дороже килограмма второго?

Решение. Пусть куплено x (*кг*) лигроина. Тогда керосина было куплено $n-x$ (*кг*). Цена килограмма лигроина будет $\frac{a}{x}$ руб., а керосина $\frac{a}{n-x}$ руб. Так как килограмм лигроина на b рублей дороже килограмма керосина, то получаем уравнение

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{n-x}=b.$$

После преобразования уравнение примет вид:

$$bx^2-(2a+bn)x+an=0.$$

Тогда

$$x=\frac{2a+bn\pm\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}.$$

Знак плюс перед радикалом не годится, потому что в этом случае x был бы больше n, так как*

$$\frac{2a+bn}{2b} > \frac{bn}{2b} = \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b} > \frac{\sqrt{b^2n^2}}{2b} > \frac{bn}{2b} = \frac{n}{2}.$$

Покажем, что второй корень положительный, т. е. что

$$\frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b} > 0$$

или же, что

$$2a+bn > \sqrt{4a^2+b^2n^2}.$$

$$\sqrt{4a^2+b^2n^2+8a^2b^2n^2} = 2a+bn,$$

тогда

$$\sqrt{4a^2+b^2n^2} < 2a+bn.$$

Итак, имеем: лигроина

$$\frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b} \text{ (кг)},$$

а керосина

$$n - \frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b} = \frac{bn-2a+\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b} \text{ (кг)}.$$

§ 24. Иррациональные уравнения

1. Определение. *Иррациональным* называется каждое уравнение, ие, левая и правая части которого есть алгебраические выражения, причем хотя бы одно из них иррационально.

Примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{x-3} = 7, \quad \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x-5} = 10, \quad \sqrt[3]{x} + x = 71.$$

Но уравнения $\sqrt{2x}+3=7$, $\lg x - \sqrt{x-2} = 7$ не иррациональны.

В элементарной алгебре рассматриваются лишь такие иррациональные уравнения, в которых имеющиеся радикалы четной степени предполагают арифметическими (а нечетной степени — положительными или отрицательными, в зависимости от знака подкоренного выражения).

Общий метод решения иррационального уравнения заключается в том, что сначала изолируется один радикал, затем обе части уравнения

---

* Из условия задачи следует, что $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$.

возводят в степень, потом снова изолируется радикал и т. д. Всякое иррациональное уравнение после конечного числа таких преобразований может быть приведено к рациональному уравнению. Получающееся в результате уравнение, вообще говоря, не будет эквивалентным заданному. Поэтому, найдя решения этого уравнения, надо проверить их путем подстановки в данное уравнение и отбросить, как посторонние, те из них, которые не будут ему удовлетворять. Однако, если обе части иррационального уравнения возводились в нечетную степень, то проверять решение не обязательно, так как в этом случае придем к уравнению, эквивалентному данному.

Если уравнение содержит радикалы с неизвестным в знаменателе, то его надо, как всегда, освободить от знаменателя, выполнив необходимые преобразования.

Прежде чем приступить к решению иррационального уравнения, целесообразно определить область допустимых значений для неизвестного, так как в некоторых случаях после этого вообще отпадает необходимость решать уравнение.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=3.$$

Решение. Для первого радикала $x \geqslant 3$, для второго $x \leqslant 2$. В области действительных чисел уравнение не имеет решений, так как нет общих значений x, для которых оба радикала имеют значение.

Ответ. Данное уравнение не имеет решений.

2. Решение простейших иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $3+\sqrt{x-2}=4$.

Решение.

$$\sqrt{x-2}=4-3,\quad \sqrt{x-2}=1,\quad x-2=1,\quad x=3.$$

Проверка. $3+\sqrt{3-2}=3+1=4$. Как видим, $x=3$ удовлетворяет данному уравнению.

Ответ. $x=3$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-7}=x-13$.

Решение. Возведем в квадрат обе части

$$x-7=x^2-26x+169;$$
$$x^2-27x+176=0,\ x_1=16,\ x_2=11.$$

Проверкой легко убедиться, что $x=16$ удовлетворяет уравнению. $x_2=11$ уравнению не удовлетворяет. Ведь левая часть уравнения неотрицательное число; тогда и правая часть должна быть неотрицательным числом, а это возможно при условии, что $x \geqslant 13$.

Ответ. $x=16$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$.
Решение.

$$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5};\ 2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5;$$
$$x-46=-14\sqrt{x+5};\ (x-46)^2=196(x+5);$$
$$x^2-288x+1136=0,\ x_1=4,\ x_2=284.$$

Значение $x=4$ удовлетворяет уравнению. Значение $x=284$ ему не удовлетворяет.
Ответ. $x=4$.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$.
Решение. Область допустимых значений $x\geqslant 0$, $x\neq 16$ и $x\neq 49$.

$$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-7)=(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-4);$$
$$x-2\sqrt{x}-7\sqrt{x}+14=x-6\sqrt{x}-4\sqrt{x}+24;$$
$$-9\sqrt{x}+14=-10\sqrt{x}+24;\ \sqrt{x}=10,\ x=100.$$

Проверка. $\dfrac{\sqrt{100}-2}{\sqrt{100}-4}=\dfrac{\sqrt{100}-6}{\sqrt{100}-7}$, $\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.
Ответ. $x=100$.
Пример 5. Решить уравнение

$$(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}=(5x+4)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$[(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}]^2=[(5x+4)^{\frac{1}{2}}]^2;$$
$$3x+1+2(3x+1)^{\frac{1}{2}}(4x-3)^{\frac{1}{2}}+4x-3=5x+4;$$
$$[(3x+1)^{\frac{1}{2}}(4x-3)^{\frac{1}{2}}]^2=(3-x)^2;$$
$$(3x+1)(4x-3)=9-6x+x^2.$$

После преобразований имеем: $11x^2+x-12=0$. Тогда $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{12}{11}$.

Значение $x=1$ является корнем данного уравнения, а $x=-\dfrac{12}{11}$ не удовлетворяет уравнению.
Ответ. $x=1$.

Пример 6. Решить уравнение $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$.

Решение.

$$x-\sqrt{1+x^2}+x+\sqrt{1+x^2}=-2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right);$$
$$2x=-2\left[x^2-(1+x^2)\right];$$
$$2x=2,\ x=1.$$

Проверка. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{1-2}=-2.$

Ответ. $x=1$.

Пример 7. Решить уравнение $x+\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Решение.

$$x\sqrt{a^2+x^2}+a^2+x^2=5a^2;\ x\sqrt{a^2+x^2}=4a^2-x^2.$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнения и некоторых преобразований получаем:

$$9a^2x^2=16a^4;\ x^2=\frac{16a^2}{9};\ x_1=\frac{4a}{3},\ x_2=-\frac{4a}{3}.$$

Пусть $a>0$. Тогда x_1 удовлетворяет данному уравнению, а x_2 — нет. Если $a<0$, то x_2 удовлетворяет, а x_1 — нет.

Ответ. $x=\frac{4}{3}|a|$.

3. Решение иррациональных уравнений способом замены. Этот способ состоит в том, что выражение, находящееся под знаком радикала, обозначают новым неизвестным в некоторой степени, так чтобы корень извлекался.

Пример 1. Решить уравнение $x^2-\sqrt{x^2-4}=16$.

Решение. Область допустимых значений: $x^2-4\geqslant 0$, т. е., $x\leqslant -2$ и $x\geqslant 2$.

Положим $\sqrt{x^2-4}=y$, тогда $x^2-4=y^2$; $x^2=y^2+4$ и данное уравнение принимает вид $y^2-y-12=0$, откуда $y_1=4$, $y_2=-3$. y_2 отбрасываем, так как $y>0$. Найдем значение x: $x^2=y^2+4=16+4=20$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{20}$.

Оба значения $x_{1,2}=\pm\sqrt{20}$ принадлежат области допустимых зна-

чений и удовлетворяют уравнению, в чем можно убедиться путем проверки.

Ответ. $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Решение. Пусть $\sqrt[4]{97-x} = u$, $\sqrt[4]{x} = v$. Тогда

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$

$$u^2 + v^2 = 25 - 2uv, \quad u^4 + v^4 = 625 - 100uv + 4u^2v^2 - 2u^2v^2,$$

$$97 = 625 - 100uv + 2u^2v^2, \quad (uv)^2 - 50(uv) + 264 = 0,$$

$$uv = 25 \pm 19, \quad (uv)_1 = 44, \quad (uv)_2 = 6,$$

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 44 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 6. \end{cases}$$

Первая система в области действительных чисел не имеет решений. Вторую систему решаем устно: $u_1 = 3$, $v_1 = 2$; $u_2 = 2$, $v_2 = 3$. Отсюда $x_1 = 16$, $x_2 = 81$.

Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ. $x_1 = 16$, $x_2 = 81$.

4. Умножение обеих частей уравнения на величину, сопряженную выражению в левой части.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x+4} + \sqrt{20+x} = 8$.

Область допустимых значений: $x + 4 \geqslant 0$, $x \geqslant -4$; $20 + x \geqslant 0$, $x \geqslant -20$. Следовательно, $x \geqslant -4$.

Решение. Положим $\sqrt{x+4} - \sqrt{20+x} = y$. Перемножим эти равенства почленно:

$$(x + 4) - (20 + x) = 8y, \text{ откуда } y = -2.$$

Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{20+x} = 8, \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{20+x} = -2. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получаем $2\sqrt{x+4} = 6$, откуда $x + 4 = 9$, $x = 5$. Это значение принадлежит области допустимых значений и удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x = 5$.

5. Применение формул сокращенного умножения.

Пример. Решить уравнение $(8x + 4)^{\frac{1}{3}} - (8x - 4)^{\frac{1}{3}} = 2$.

Решение.

$$[(8x+4)^{\frac{1}{3}}-(8x-4)^{\frac{1}{3}}]^3=8;$$

$$8x+4-(8x-4)-3(8x+4)^{\frac{1}{3}}(8x-4)^{\frac{1}{3}}[(8x+4)^{\frac{1}{3}}-$$

$$-(8x-4)^{\frac{1}{3}}]=8^*.$$

Учитывая, что по условию выражение в квадратных скобках должно быть равно 2, получим:

$$8x+4-8x+4-6(64x^2-16)^{\frac{1}{3}}=8,$$

откуда

$$64x^2-16=0,$$

$$x^2=\frac{1}{4},$$

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

Проверка.

$$(4+4)^{\frac{1}{3}}-(4-4)^{\frac{1}{3}}=2.$$

$$(-4+4)^{\frac{1}{3}}-(-4-4)^{\frac{1}{3}}=2.$$

Ответ. $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}$.

§ 25. Системы уравнений второй степени с двумя неизвестными

1. Уравнение второй степени с двумя неизвестными. Общий вид уравнения второй степени с двумя неизвестными такой:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Здесь a, b, c, d, e, f — любые числа, только a, b, c не могут одновременно равняться нулю.

Примеры.

$$x^2+3xy+0{,}5y^2-5y=0,$$
$$xy+7=0.$$

Однако уравнение

$$x^2+5x^2y+3y-2=0$$

---

* Так как $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

не является уравнением второй степени, так как его член $5x^2y$ не второй, а третьей степени (степенью одночлена называют сумму показателей всех его букв).

Уравнение второй степени с двумя неизвестными может иметь бесконечное множество решений, но может иметь только несколько или вообще не иметь решений.

Примеры. Уравнения:

$x^2 + 4y^2 + 7 = 0$ не имеет решений (действительных);

$x^2 + 9y^2 = 0$ имеет одно решение: $x = 0$, $y = 0$.

$x^2 + 2xy = 0$ имеет бесконечное множество решений: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 2$; $y_3 = -1$ и т. д.

2. Системы двух уравнений, из которых одно первой степени, а другое — второй. В общем виде эта система уравнений записывается так:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0; \\ d_2x + c_2y + f_2 = 0. \end{cases}$$

Удобнее всего эту систему решать способом подстановки. Для этого достаточно из второго (линейного) уравнения выразить одно из неизвестных через другое и найденное выражение подставить в первое уравнение. В результате получим квадратное уравнение, решив которое, найдем значения одного из неизвестных. Затем, подставив эти значения неизвестного в какое-нибудь из данных уравнений (лучше в линейное), получим соответствующие значения второго неизвестного.

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x^2 + 15xy + 4y^2 + 43x + 24y + 7 = 0; \\ x - 2y + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения находим: $x = 2y - 5$. Подставляем в первое:

$$2(2y - 5)^2 + 15(2y - 5)y + 4y^2 + 43(2y - 5) + 24y + 7 = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$42y^2 - 5y - 158 = 0, \quad \text{откуда} \quad y_1 = 2, \quad y_2 = -\frac{79}{42}.$$

Из равенства $x = 2y - 5$ найдем: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{184}{21} = -8\frac{16}{21}$.

Однако многие системы такого вида можно решать также искусственными способами.

3. Решение системы вида:

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Пример 1.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Решение. Значения x и y можно рассматривать как корни квадратного уравнения

$$z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Имеем: $z_1 = 1$, $z_2 = 4$. Оба уравнения системы симметричны относительно x и y, поэтому получаем две пары решений: если одно решение $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, то второе будет, наоборот: $x_2 = 4$, $y_2 = 1$.

Пример 2.

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$$

Решение. Эту систему записываем в виде

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -18. \end{cases}$$

Тогда x и $-y$ будут корнями квадратного уравнения:

$$z^2 - 7z - 18 = 0.$$

Получаем

$$z_1 = 9, \quad z_2 = -2.$$

Тогда

$$x_1 = 9, \ -y_1 = -2 \text{ или } x_1 = 9, \ y_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2,$$
$$-y_2 = 9 \text{ или } x_2 = -2, \ y_2 = -9.$$

4. Решение системы вида:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Возвысив первое уравнение в квадрат и вычтя из него второе, получим:

$$2xy = a^2 - b, \text{ откуда } xy = \frac{a^2 - b}{2}.$$

Теперь вопрос сводится к решению системы:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \dfrac{a^2 - b}{2}, \end{cases}$$

которую мы рассмотрели выше.

5. Решение системы вида

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x \pm y = b. \end{cases}$$

Эта система решается почленным делением первого уравнения на второе. В результате данная система заменяется следующей, равносильной ей:

$$\begin{cases} x \mp y = \dfrac{a}{b}, \\ x \pm y = b, \end{cases}$$

т. е. приводится к решению линейной системы с двумя неизвестными.

6. Система двух уравнений, из которых каждое второй степени. Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0. \end{cases}$$

Такая система в общем виде не решается элементарно, так как она, вообще говоря, приводится к полному уравнению четвертой степени.

Рассмотрим некоторые частные виды таких систем, которые можно решить элементарно.

Пример 1.

$$\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} xy + x + y = 29 \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} 2xy + 2x + 2y = 58 \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{matrix}$$

$$3xy = 60 \text{ или } xy = 20.$$

Подставив в первое (или во второе) уравнение $xy = 20$, получим: $x + y = 9$.

Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 20, \\ x + y = 9 \end{cases}$$

находим: $x_1 = 5$, $y_1 = 4$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 5$.

Ответ. Данная система имеет два решения.

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 5; \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 4.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2-3xy+2y^2=14 \\ x^2+xy-y^2=5 \end{array}\right| 2 \left|\begin{array}{l} 2x^2-3xy+2y^2=14 \\ 2x^2+2xy-2y^2=10 \\ \hline 4x^2-xy \quad\quad =24 \end{array}\right.$$

Отсюда

$$y=\frac{4x^2-24}{x}.$$

Подставляя значение y во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$11x^4-163x^2+576=0.$$

Отсюда $x_1^2=9$, $x_2^2=\frac{64}{11}$. Тогда находим четыре значения x: $3, -3, \frac{8}{\sqrt{11}}, -\frac{8}{\sqrt{11}}$; подставив их в уравнение $4x^2-xy=24$, получим соответствующие значения y.

Иногда системы решаются способом разложения левой части одного из уравнений на множители, если его правая часть равна нулю.

Пример 3.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2-3xy+5y-5=0, \\ xy+2-2y-x=0. \end{array}\right.$$

Решение.

$$xy+2-2y-x=(xy-x)+(2-2y)=x(y-1)-2(y-1)= \\ =(y-1)(x-2).$$

Тогда

$$(x-2)(y-1)=0 \text{ или } x-2=0 \text{ или } y-1=0.$$

Значит, система приводится к решению совокупности двух систем уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} y-1=0 \\ 2x^2-3xy+5y-5=0 \end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x^2-3xy+5y-5=0. \end{array}\right.$$

Пример 4.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=a, \\ xy=b. \end{array}\right.$$

Эту систему можно решать несколькими способами.

Первый способ (способ подстановки). Из второго уравнения определяем одно неизвестное через другое; например, $x=\frac{b}{y}$. Подставив это значение в первое уравнение, получим биквадратное уравнение:

$$y^4-ay^2+b^2=0.$$

Решив его, найдем для y четыре значения. Подставляя их в $x = \frac{b}{y}$, получим четыре соответствующих значения x.

Второй способ. Умножим второе уравнение на 2 и прибавим к первому:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b \text{ или } (x + y)^2 = a + 2b;$$

откуда

$$x + y = \pm \sqrt{a + 2b},$$

т. е. получили систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \pm \sqrt{a + 2b}; \\ xy = b. \end{cases}$$

Решение этой системы рассмотрено выше.

Третий способ. Если умножить обе части второго уравнения на 2 и вычесть его почленно из первого, то получим

$$x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b,$$

или

$$x - y = \pm \sqrt{a - 2b}, \text{ когда } a \geqslant 2b.$$

Если умножить второе уравнение на 2 и прибавить к первому, то получим

$$x + y = \pm \sqrt{a + 2b}.$$

Таким образом, имеем совокупность четырех систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

Четвертый способ. Возвысив второе уравнение в квадрат *, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x^2 y^2 = b^2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что x^2 и y^2 — корни квадратного уравнения:

$$z^2 - az + b^2 = 0.$$

Решив его, получим:

$$x^2 = z_1, \quad y^2 = z_2.$$

и, наоборот,

$$x^2 = z_2, \quad y^2 = z_1 \text{ и т. д.}$$

Ниже рассмотрим два конкретных примера.

Пример 5.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x^2y^2 = 400. \end{cases}$$

Составляем уравнение

$$t^2 - 41t + 400 = 0.$$

Откуда $t_1 = 25$, $t_2 = 16$. Значит $x^2 = 25$, $y^2 = 16$ и, наоборот, $y^2 = 25$; $x^2 = 16$.

$$x_{1,2} = \pm 5; \quad x_{3,4} = \pm 4;$$
$$y_{1,2} = \pm 4; \quad y_{3,4} = \pm 5.$$

Учитывая, что $xy > 0$, получаем всего четыре решения данной системы.

Ответ. $x_1 = 5$, $y_1 = 4$;
$x_2 = -5$, $y_2 = -4$;
$x_3 = 4$, $y_3 = 5$;
$x_4 = -4$, $y_4 = -5$.

Пример 6.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 4b^2, \\ xy = 2ab. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 4b^2, \\ x^2y^2 = 4a^2b^2. \end{cases}$$

Составляем квадратное уравнение

$$t^2 - (a^2 + 4b^2)\,t + 4a^2b^2 = 0.$$

Отсюда $t_1 = a^2$, $t_2 = 4b^2$, $x_{1,2} = \pm a$, $y_{1,2} = \pm 2b$, $x_{3,4} = \pm 2b$, $y_{3,4} = \pm a$.

Ответ. $x_1 = a$, $y_1 = 2b$;
$x_2 = -a$; $y_2 = -2b$;
$x_3 = 2b$, $y_3 = a$;
$x_4 = -2b$, $y_4 = -a$.

Во многих случаях способ введения новых переменных значительно упрощает решение системы уравнений.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\dfrac{x}{y} = z$, тогда $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{z}$.

Имеем:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{34}{15}, \quad 15z^2 - 34z + 15 = 0, \quad z_1 = \frac{5}{3}, \quad z_2 = \frac{3}{5}.$$

Значит, получаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5}, \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3}, \\ x^2 + y^2 = 34, \end{cases}$$

откуда находим четыре решения:

$x_1 = 3$, $y_1 = 5$; $x_3 = 5$, $y_3 = 3$;
$x_2 = -3$, $y_2 = -5$; $x_4 = -5$, $y_4 = -3$.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + xy + y = 7. \end{cases}$$

Решение. Умножим обе части второго уравнения на 2 и прибавим к первому:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2(x + y) = 24.$$

Положим $x + y = z$, тогда $z^2 + 2z - 24 = 0$, откуда $z_1 = -6$, $z_2 = 4$. Получается две системы:

$$\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 13 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases}$$

которые имеют два действительных решения:

$x_1 = 1$, $y_1 = 3$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ x^2+y^2=104. \end{cases}$$

Решение. Делим второе уравнение на x^2y^2 (легко показать, что $x\neq 0$, $y\neq 0$), тогда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{104}{x^2y^2}. \end{cases}$$

Прибавим к обеим частям второго уравнения по $\dfrac{2}{xy}$, тогда получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{104}{x^2y^2}+\dfrac{2}{xy}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{9}{25}-\dfrac{104}{x^2y^2}=\dfrac{2}{xy}. \end{cases}$$

Полагая $\dfrac{1}{xy}=u$, имеем: $104u^2+2u-\dfrac{9}{25}=0$. После получения значений $u_1=\dfrac{1}{20}$ и $u_2=-\dfrac{9}{130}$ система приводится к двум таким системам:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{20}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{1}{xy}=-\dfrac{9}{130}, \end{cases}$$

которые решаются легко.

Пример 10.

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy=-15. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Уравняем свободные члены

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105 \\ 7y^2 - 14xy = -105 \end{array}$$

и сложим полученные уравнения:

$$5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0.$$

Так как $y \neq 0$, то разделим обе части этого уравнения на y^2:

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 19\left(\frac{x}{y}\right) + 12 = 0.$$

Полагая $\frac{x}{y} = u$, получаем уравнение

$$5u^2 - 19u + 12 = 0,$$

откуда $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{4}{5}$. Следовательно, $x = 3y$ и $x = \frac{4}{5}y$.

Подставив значение $x = 3y$ в одно из данных уравнений, например во второе, получим $y^2 = 3$, $y = \pm\sqrt{3}$, откуда $x = \pm 3\sqrt{3}$. Если взять $x = \frac{4}{5}y$, то получим $x = \pm 4$, $y = \pm 5$.

О т в е т. $x_1 = 3\sqrt{3}$, $y_1 = \sqrt{3}$,
$x_2 = -3\sqrt{3}$, $y_2 = -\sqrt{3}$,
$x_3 = 4$, $y_3 = 5$,
$x_4 = -4$, $y_4 = -5$.

П р и м е ч а н и е. Рассмотренным здесь приемом можно решать также многие приведенные ранее системы (см. примеры 2, 5, 8).

§ 26. Задачи на составление систем уравнений

З а д а ч а 1. Расстояние между двумя городами, равное 480 *км*, пассажирский поезд проходит на 4 *ч* скорее товарного. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 *км/ч*, а скорость товарного увеличить на 2 *км/ч*, то пассажирский поезд пройдет все расстояние на 5 *ч* скорее товарного. Найти скорость каждого поезда.

Р е ш е н и е. Обозначим скорость товарного поезда через x (*км/ч*), а скорость пассажирского поезда через y (*км/ч*). Тогда в первом случае товарный поезд пройдет 480 *км* за $\frac{480}{x}$ (*ч*), а пассажирский — за $\frac{480}{y}$ (*ч*).

Так как время движения пассажирского поезда меньше времени движения товарного на 4 *ч*, то получим уравнение:

$$\frac{480}{y} = \frac{480}{x} - 4.$$

Во втором случае скорость товарного поезда будет $x + 2$ (*км/ч*), а скорость пассажирского $y + 8$ (*км/ч*). Значит, товарный поезд пройдет 480 *км* за $\frac{480}{x+2}$ (*ч*), а пассажирский — за $\frac{480}{y+8}$ (*ч*). Тогда, согласно условию задачи, составим уравнение

$$\frac{480}{y+8} = \frac{480}{x+2} - 5.$$

Таким образом, получили систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{480}{y} = \frac{480}{x} - 4, \\ \frac{480}{y+8} = \frac{480}{x+2} - 5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{120}{y} = \frac{120}{x} - 1, \\ \frac{96}{y+8} = \frac{96}{x+2} - 1. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим: $x = 30$ *км/ч*, $y = 40$ *км/ч*.

Ответ. 30 *км/ч* и 40 *км/ч*.

Задача 2. Студенты взяли на лодочной станции напрокат лодку. Сначала они спустились на 20 *км* вниз по течению реки, затем повернули обратно и вернулись на лодочную станцию, затратив на всю прогулку 7 *ч*. На обратном пути, на расстоянии 12 *км* от лодочной станции, они встретили плот, проплывавший мимо лодочной станции как раз в тот момент, когда они отправлялись на прогулку. Определить, с какой скоростью двигалась лодка вниз по течению реки и какова скорость течения реки.

Решение. Если обозначить скорость лодки в стоячей воде через x (*км/ч*), скорость течения реки, а следовательно, и скорость плота через y (*км/ч*), то скорость лодки по течению будет $x + y$, против течения $x - y$; время движения лодки по течению $\frac{20}{x+y}$ *ч*, против течения $\frac{20}{x-y}$ *ч*, до встречи с плотом $\frac{20}{x+y} + \frac{8}{x-y}$ и, наконец, время движения плота $\frac{12}{y}$.

Так как, согласно условию, прогулка длилась 7 *ч*, получим уравнение

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7.$$

Поскольку время движения лодки и плота до их встречи было одно и то же, получим уравнение

$$\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{20}{x+y}+\dfrac{20}{x-y}=7,\\ \dfrac{20}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=\dfrac{12}{y},\end{cases}$$

находим $x=7$, $y=3$. Итак, скорость лодки по течению равна 10 *км/ч*, а скорость течения реки 3 *км/ч*.

Ответ. 10 *км/ч* и 3 *км/ч*.

Задача 3. На двух прямоугольных участках земли посажено рядами 350 плодовых деревьев, причем оказалось, что на каждом участке число рядов на 1 больше числа деревьев в ряду. По скольку деревьев было посажено в каждом ряду на том и другом участке, если на первом из них было на 130 деревьев больше, чем на втором?

Решение. Обозначим число деревьев в ряду на первом участке через x, на втором через y. Тогда число рядов на первом участке будет $x+1$, на втором $y+1$. А деревьев на первом участке будет $x(x+1)$, на втором $y(y+1)$. Согласно условию задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases}x(x+1)-y(y+1)=130;\\ x(x+1)+y(y+1)=350.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x_1=15$, $x_2=16$, $y_1=10$, $y_2=-11$. Значит, число деревьев в ряду на первом участке равно 15, на втором 10.

Ответ. 15; 10.

Задача 4. Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью на 6 *км/ч* большей, чем на подъеме, тратит на путь от A до B 2 *ч* 40 *мин*, а на обратный путь от B до A на 20 *мин* меньше. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске и длину подъема в направлении от A и B, если длина всей дороги равна 36 *км*.

Решение. Обозначим длину подъема в *км* через x, а скорость велосипедиста на подъеме через y (*км/ч*).

Далее запишем данные в виде схемы:

Этапы	S	v	t
Подъем	x	y	$\frac{x}{y}$
Спуск	$36-x$	$y+6$	$\frac{36-x}{y+6}$

$$\frac{x}{y}+\frac{36-x}{y+6}=\frac{8}{3}$$

2 *ч* 40 *мин* = $=2\frac{2}{3}$ *ч*

Этапы	S	v	t
Подъем	$36-x$	y	$\frac{36-x}{y}$
Спуск	x	$y+6$	$\frac{x}{y+6}$

$$\frac{36-x}{y}+\frac{x}{y+6}=\frac{7}{3}$$

2 *ч* 40 *мин* — — 20 *мин* = = 2 *ч* 20 *мин* = $=2\frac{1}{3}$ *ч*

Решив полученную систему уравнений, находим $y_1=12$, $y_2=-3{,}6$; $x_1=24$. Таким образом, длина подъема от A до B — 24 *км*, скорость на подъеме — 12 *км/ч*, скорость на спуске — 18 *км/ч*.

Ответ. 12 *км/ч*, 18 *км/ч* и 24 *км*.

Задача 5. Деревянная балка весит 90 *кг*, а железная балка, длина которой на 2 *м* больше деревянной, весит 160 *кг*, причем вес 1 *пог. м* железной балки на 5 *кг* больше веса 1 *пог. м* деревянной балки. Найти вес 1 *пог. м* и длину каждой балки.

Решение. Приведем сокращенную запись.

Длина деревянной балки — x (*м*)

» железной » — $x+2$ (*м*)

Вес деревянной балки — 90 *кг*

Вес 1 *пог. м* деревянной балки — y (*кг*)

» 1 *пог. м* железной » — $y+5$ (*кг*)

Вес железной балки — 160 *кг*

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} xy=90, \\ (x+2)(y+5)=160. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_{1,2}=6$, $y=15$.

Ответ. Вес 1 *пог. м* деревянной балки 15 *кг*, длина деревянной балки 6 *м*, вес 1 *пог. м* железной балки — 20 *кг*, длина железной балки 8 *м*.

Задача 6. По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся равномерно два тела. В известный момент тело A отстояло на 60 *м* от вершины угла, а тело B — на 80 *м* от нее. Через 3 *сек* расстояние между A и B стало равно 70 *м*, а через следующие 2 *сек* расстояние между телами уменьшилось еще на 20 *м*. Найти скорость каждого тела.

Решение. Обозначим скорость тела A через x (*м/сек*), скорость B через y (*м/сек*). Тогда расстояние от A до вершины угла через 3 *сек* — $60 - 3x$; расстояние от B до вершины угла через 30 *сек* — $80 - 3y$; квадрат расстояния между этими телами через 3 *сек* будет составлять $(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2$. Так как по условию задачи расстояние равно 70 *м*, получаем уравнение

$$(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2.$$

Расстояние тела A от вершины угла через 3 *сек* + 2 *сек* = 5 *сек* — $60 - 5x$; расстояние от тела B до вершины угла через 5 *сек* — $80 - 5y$; тогда квадрат расстояния между этими телами через 5 *сек* будет $(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2$. Так как по условию расстояние равно $(70 - 20) = 50$ (*м*), то получим уравнение

$$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2.$$

Решив систему уравнений

$$(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2,$$
$$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2,$$

получим $y_{1,2} = 8$, $x_{1,2} = 6$. Следовательно, скорость тела A равна 6 *м/сек*; скорость тела B — 8 *м/сек*.

Ответ. 6 *м/сек*; 8 *м/сек*.

Задача 7. По круговой дорожке длиной 2 *км* движутся в одном направлении два конькобежца, которые сходятся через каждые 20 *мин*. Найти, с какой скоростью движется каждый конькобежец, если первый пробегает окружность на 1 *мин* скорее второго.

Решение. Обозначим скорость первого конькобежца через x (*км/мин*), скорость второго — через y (*км/мин*). Тогда первый пройдет всю дорожку за $\frac{2}{x}$ *мин*, второй за $\frac{2}{y}$ *мин*; так как первый из них пробегает дорожку на 1 *мин* быстрее второго, получаем уравнение

$$\frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1.$$

Каждую минуту расстояние между конькобежцами увеличивается на $x - y$. За время, прошедшее от одной встречи до следующей (т. е. за 20 *мин*), расстояние должно увеличиться на 2 *км*, поэтому $20(x -$

$-y)=2$. Полученная система уравнений имеет решение: $x_1=\frac{1}{2}$; $y_1=\frac{2}{5}$; $x_2=-\frac{2}{5}$; $y_2=-\frac{1}{2}$. Значит, скорость первого конькобежца $\frac{1}{2}$ *км/мин* $=30$ *км/ч*, а скорость второго $-\frac{2}{5}$ *км/мин* $=$ $=24$ *км/ч*.

Ответ. 30 *км/ч*, 24 *км/ч*.

Задача. Рабочий изготовил в назначенный срок некоторое количество одинаковых деталей. Если бы он ежедневно изготовлял их на 10 штук больше, то выполнил бы работу на $4\frac{1}{2}$ дня раньше срока, а если бы он делал на 5 деталей меньше, то опоздал бы на 3 дня против назначенного срока. Сколько деталей и в какой срок он выполнил?

Решение. Пусть рабочий сделал x деталей в y дней. Тогда ежедневно он изготовлял $\frac{x}{y}$ деталей. По условию, если бы он ежедневно изготовлял $\frac{x}{y}+10$ деталей, то выполнил бы работу за $y-$ $-4\frac{1}{2}$ дня. Значит $\left(\frac{x}{y}+10\right)\left(y-4\frac{1}{2}\right)=x$. Второе условие дает уравнение $\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10y-4\frac{1}{2}\frac{x}{y}=45, \\ -5y+3\frac{x}{y}=15. \end{cases}$$

Сначала находим $\frac{x}{y}=50$. Тогда $y=27$, а так как $x=50y$, то $x=$ $=1350$. Значит, рабочий сделал 1350 деталей за 27 дней.

Ответ. 1350 деталей, 27 дней.

Задача 9. При совместной работе двух тракторов различной мощности колхозное поле было вспахано за 8 дней. Если бы половину поля вспахать сначала одним трактором, то при дальнейшей работе двух тракторов вся работа была бы закончена за 10 дней. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно?

Р е ш е н и е. Пусть первым трактором можно вспахать все поле за x дней, вторым — за y дней. Первое условие дает

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}.$$

Первый трактор может вспахать половину поля за $\frac{1}{2}x$ дней. По условию другая половина может быть вспахана двумя тракторами за $10-\frac{1}{2}x$ дней. Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\frac{1}{2}}{10-\frac{1}{2}x}.$$

Решив систему уравнений, получим $x=12$, $y=24$. Следовательно, первым трактором можно вспахать поле за 12 дней, вторым — за 24 дня.

О т в е т. 12 дней, 24 дня.

§ 27. Числовые неравенства

1. Понятие о неравенстве. Два числа или выражения, соединенные знаком «больше» ($>$) или знаком «меньше» ($<$), образуют неравенство.

Примеры неравенств:

$$3<8;\quad 5>-2;\quad \frac{x-3}{2}>3x-1;\quad \frac{a+2}{a+3}<3a-2;\quad m+n>7.$$

Выражение, стоящее слева от знака неравенства, называется левой частью, а выражение, стоящее справа от знака неравенства,— правой частью.

Знаки $>$ и $<$ противоположны друг другу. Если два неравенства имеют противоположные знаки, то они называются неравенствами противоположного смысла. Так, $-4>-5$ и $2<5$ являются неравенствами противоположного смысла.

Иногда между двумя числами или выражениями ставят знаки $\geqslant$ (не меньше) и $\leqslant$ (не больше), например

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Такие записи называют нестрогими неравенствами.

П р и м е ч а н и я. 1. Знаки $>$ (больше) и $<$ (меньше) предложил английский алгебраист Т. Гарриот (1560—1621) в своем сочинении по алгебре, опубликованном посмертно в 1631 г.

2. Неравенствами называют также два числа или выражения, соединенных знаком $\neq$ (не равно). Однако дальше речь будет итти не о таких неравенствах.

Неравенства бывают *числовые* и *буквенные*. Числовыми называют такие неравенства, обе части которых есть числа, записанные цифрами. Если хотя бы одна часть неравенства есть буквенное выражение, такое неравенство называется буквенным.

2. Свойства числовых неравенств. 1) Если первое число больше второго, а второе больше третьего, то первое также больше третьего. С помощью букв это свойство (его называют свойством *транзитивности*) можно записать так:

$$\text{Если } a > b \text{ и } b > c, \text{ то } a > c.$$

2) Неравенство не нарушится, если к каждой части его прибавить одно и то же число, т. е.

$$\text{если } a > b, \text{ то } a + c > b + c.$$

Примеры. а) К обеим частям неравенства $9 > 5$ прибавим по 7, получим $16 > 12$.

б) Из обеих частей неравенства $-12 < 1$ вычтем по 5, т. е. прибавим по -5, получим $-7 < -4$.

3) Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую, переменив его знак на противоположный, т. е. из $a + b > c$ следует, что $a > c - b$, $a + b - c > 0$.

4) Если обе части неравенства имеют одинаковые члены, их можно опустить, т. е. из неравенства $a + c > b + c$ следует неравенство $a > b$.

5) Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать; при этом получим неравенство такого же смысла, как и данные.

Примеры.

$$\begin{array}{r} 3 < 9 \\ +\ -2 < 1 \\ \hline 1 < 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a > b \\ +\ c > d \\ \hline a + c > b + d. \end{array}$$

6) Из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое.

Примеры.

$$\begin{array}{r} -10 < 0 \\ -\ -8 > -13 \\ \hline -2 < 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d. \end{array}$$

7) Неравенство остается верным, если обе части его умножить на одно и то же положительное число. Неравенство переходит в ра-

венство $0 = 0$, если обе части его умножить на нуль. Неравенство меняет смысл на противоположный, если обе части его умножить на одно и то же отрицательное число. Это свойство кратко записывается так.

Если $a > b$, то при $c > 0$, $ac > bc$;
при $c = 0$, $ac = bc$;
при $c < 0$, $ac < bc$.

Примеры.

Дано неравенство	Множитель	Новое неравенство
$7 > 4$	2	$14 > 8$
$-9 < -1$	4	$-36 < -4$
$13 > 9$	-2	$-26 < -18$
$3 > -10$	-5	$-15 < 50$
$-3{,}2 > -7{,}5$	0	$0 = 0$

Примечание. Так как деление на число, отличное от нуля, можно рассматривать как умножение на обратное ему число, то это свойство распространяется и на деление обеих частей неравенства на положительное и отрицательное число:

$$\text{если } a > b, \text{ то } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ при } c > 0$$

и

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ при } c < 0.$$

8) Если почленно перемножить два неравенства, имеющих положительные члены и один и тот же смысл, то получится неравенство того же смысла, т. е.

если a, b, c, d — положительные и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.

9) Неравенство, имеющее положительные члены, не нарушается, если каждую его часть возвести в степень с одним и тем же натуральным показателем, т. е. если a, b — положительные, n — натуральное и $a > b$, то $a^n > b^n$.

10) Если a, b — положительные, n — натуральное и $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Примечание. Все эти свойства, сформулированные для строгих числовых неравенств, остаются в силе и для нестрогих числовых неравенств: везде вместо знака $>$ можно поставить $\geqslant$.

§ 28. Неравенства первой степени

1. Неравенства с неизвестными. Неравенство, содержащее буквы, ы, обозначающие неизвестные числа, называется неравенством с неизвестными. Например, в неравенстве $2x + 3 > 12$ буквой x обозначено

неизвестное число. Это неравенство с одним неизвестным x. Неравенство $2x + 3y > 5$ — с двумя неизвестными x и y.

Если в неравенство с одним неизвестным вместо неизвестного поставить какое-нибудь число и в результате получится верное числовое неравенство, то говорят, что это число удовлетворяет данному неравенству. Каждое число, удовлетворяющее неравенству, называют решение этого неравенства. Решить неравенство — значит найти все его решения. Для решения неравенств, так же как и уравнений, их надо преобразовать в неравенства более простые и равносильные исходным.

Два неравенства называются равносильными (или эквивалентными), если каждое из них имеет те и только те решения, что и другое.

Преобразования неравенств в равносильные им основаны на следующих свойствах.

а) Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число или многочлен относительно неизвестного, то новое неравенство будет равносильно данному.

б) Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то новое неравенство будет равносильно данному.

в) Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и переменить знак неравенства на противоположный, то новое неравенство будет равносильно данному.

г) Члены неравенства можно переносить из одной части в другую, изменяя их знаки на противоположные.

д) Если в обеих частях неравенства имеются одинаковые члены, то их можно отбросить.

В результате таких преобразований полученные неравенства будут равносильны данным.

2. Неравенства первой степени с одним неизвестным. Неравенствами первой степени с одним неизвестным называются такие неравенства, в которых одна часть представляет собой многочлен первой степени относительно одного неизвестного, а вторая тоже многочлен первой степени относительно того же неизвестного или какое-нибудь число.

Общий вид таких неравенств: $ax + b > cx + d$; $ax + b < cx + d$.

Некоторые из коэффициентов a, b, c, d могут быть нулями, а та или иная часть неравенства может содержать лишь один член или может даже быть равной нулю, например $4x - 5 > 1 + 3x$; $2x < 1{,}5x - 4$; $2x - 9 > 0$. Только a и c одновременно не могут быть нулями, так как в этом случае мы имели бы просто числовое неравенство.

Всякое неравенство первой степени можно привести к виду

$$ax > b \quad \text{или} \quad ax < b.$$

Пусть имеем неравенство $ax > b$. Разделив обе ее части на a, получим

$$x > \frac{b}{a}, \text{ если } a > 0,$$

$$x < \frac{b}{a}, \text{ если } a < 0.$$

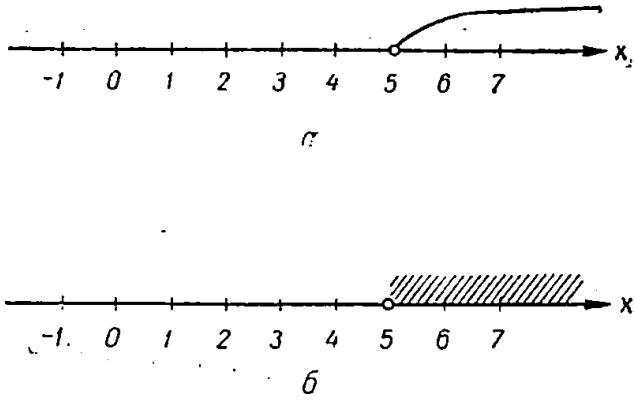


Рис. 25.

Так записывают множество всех решений данного неравенства.

Приведем примеры решения неравенств первой степени с одним неизвестным.

Пример 1. Решить неравенство

$$6x + 20 > 3x + 35.$$

Решение.

$$6x - 3x > 35 - 20,$$
$$3x > 15,$$
$$x > 5.$$

Ответ. $x > 5$. Этот ответ можно изобразить на числовой оси. Область решений (все действительные числа, больше 5) можно отметить дугой (рис. 25, *а*) или штриховкой (рис. 25, *б*).

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x+3}{3} - 8 > \frac{2x-1}{3} + 1.$$

Решение.

$$x+3-24>2x-1+3,$$
$$x-24>2x-1,$$
$$x-2x>-1+24,$$
$$-x>23.$$
$$x<-23.$$

Ответ. $x<-23$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{z-1}{3}-2(1-4z)>\frac{1}{4}z-\frac{7-52z}{6}.$$

Решение.

$$\frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{z-1}{3}}-2\left(1-\overset{12}{\smile}{4z}\right)>\frac{\overset{3}{\smile}}{\frac{1}{4}}z-\frac{\overset{2}{\smile}}{\frac{7-52z}{6}},$$
$$4(z-1)-24(1-4z)>3z-2(7-52z),$$
$$4z-4-24+96z>3z-14+104z,$$
$$4z+96z-3z-104z>-14+4+24,$$
$$-7z>14,$$
$$z<-2.$$

Ответ. $z<-2$.

3. Система неравенств первой степени с одним неизвестным. Чтобы решить систему двух или нескольких неравенств с одним неизвестным, надо решить каждое из данных неравенств отдельно и взять общую часть множеств всех их решений.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}3x+5<17-x,\\4x>x-6.\end{cases}$$

Решение. Решаем каждое неравенство

$$3x+5<17-x, \qquad 4x>x-6,$$
$$3x+x<17-5, \qquad 4x-x>-6,$$
$$4x<12, \qquad 3x>-6,$$
$$x<3. \qquad x>-2.$$

Итак, данная система неравенств равносильна такой:

$$\begin{cases}x<3,\\x>-2.\end{cases}$$

Как видно из рис. 26, обоим неравенствам удовлетворяют числа большие -2, но меньшие 3.

Ответ. $-2 < x < 3$.

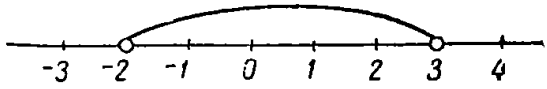


Рис. 26.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 7x > 2x + 20, \\ x - 3 < 6 - 2x. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{rr} 7x > 2x + 20, & x - 3 < 6 - 2x, \\ 7x - 2x > 20, & x + 2x < 6 + 3, \\ 5x > 20, & 3x < 9, \\ x > 4. & x < 3. \end{array}$$

Первому неравенству удовлетворяют числа, большие 4, а второму — меньшие 3. Но нет такого числа, которое было бы одновременно больше 4 и меньше 3 (рис. 27).

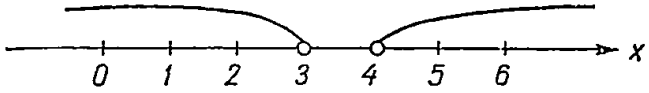


Рис. 27.

Ответ. Данная система неравенств решений не имеет.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 8x + 12 > 2x, \\ 2(x + 2) + 3 > 7, \\ 0{,}5(x + 1) \geqslant 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{lll} 8x + 12 > 2x, & 2(x + 2) + 3 > 7, & 0{,}5(x + 1) \geqslant 2, \\ 8x - 2x > -12, & 4x + 4 + 3 > 7, & 0{,}5x + 0{,}5 \geqslant 2, \\ 6x > -12, & 4x > 0, & 0{,}5x \geqslant 1{,}5, \\ x > -2. & x > 0. & x \geqslant 3. \end{array}$$

Всем данным неравенствам удовлетворяют числа $x \geqslant 3$ (рис. 28).
Ответ. $x \geqslant 3$.

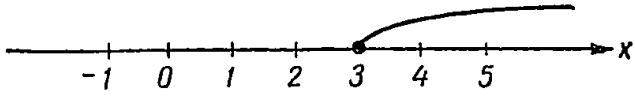


Рис. 28.

4. Неравенства, в которых некоторые члены входят под знак абсолютной величины. Неравенство $|x| < a$ равносильно такому двойному неравенству $-a < x < a$ или такой системе

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство

$$|3x + 2| < 5.$$

Решение. Данное неравенство равносильно такой системе

$$\begin{cases} 3x + 2 < 5, \\ 3x + 2 > -5. \end{cases}$$

Решим ее.

$$\begin{array}{rr} 3x + 2 < 5, & 3x + 2 > -5, \\ 3x < 3, & 3x > -7, \\ x < 1. & x > -\frac{7}{3}. \end{array}$$

Ответ. $-\frac{7}{3} < x < 1$.

Неравенству $|x| > a$ удовлетворяют все решения неравенства $x > a$ и все решения неравенства $x < -a$.

Пример. Решить неравенство

$$|2x - 1| > 5.$$

Решение.

$$\begin{array}{rr} 2x - 1 > 5, & 2x - 1 < -5, \\ 2x > 6, & 2x < -4, \\ x > 3. & x < -2. \end{array}$$

Ответ. Данному неравенству удовлетворяют все числа $x > 3$ и все числа $x < -2$ (рис. 29).

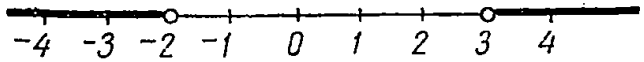


Рис. 29.

Примечание. Данное неравенство распалось на два изолированных неравенства, но не на их систему. Система двух полученных неравенств не имеет решений, а неравенство рассматриваемого вида всегда имеет решения.

§ 29. Неравенства второй степени и высших степеней

1. Неравенства второй степени. Неравенство второй степени с одним неизвестным в общем случае записывается так:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 > a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Его всегда можно записать в виде

$$ax^2 + bx + c > 0$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Коэффициент a можно считать положительным (если бы он был отрицательным, можно было бы обе части неравенства умножить на -1, изменив знак неравенства на противоположный).

Чтобы решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

надо сначала вычислить его дискриминант $b^2 - 4ac$. Если он окажется положительным, т. е. если трехчлен в левой части неравенства будет иметь разные действительные корни, то данному неравенству удовлетворяют все числа, большие большего корня и меньшие меньшего корня. Если дискриминант будет отрицательным, то данному неравенству будут удовлетворять все действительные числа. Если, наконец, дискриминант будет равен нулю, то данному неравенству будут удовлетворять все действительные числа, кроме $-\frac{b}{2a}$.

Неравенству $ax^2 + bx + c < 0$ при положительном дискриминанте удовлетворяют все те значения неизвестного, которые больше меньшего корня трехчлена в левой части, но меньше большего корня. Если же дискриминант равен нулю или отрицательный, то данное неравенство не имеет решений.

Пример 1. Решить неравенство

$$2x^2 + 3x - 2 > 0.$$

Р е ш е н и е. Здесь $b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 > 0$. Найдем корни трехчлена в левой части. Для этого решим уравнение

$$2x^2 + 3x - 2 = 0,$$

$$x_{1,\,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 0{,}5.$$

О т в е т. $x < -2$ и $x > 0{,}5$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$-3x^2 + 5x - 4 > 0.$$

Р е ш е н и е. Так как коэффициент при x^2 здесь отрицательный, умножим обе части неравенства на -1:

$$3x^2 - 5x + 4 < 0;$$

$$b^2 - 4ac = 25 - 48 = -23 < 0.$$

О т в е т. Данное неравенство не имеет решений.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

Р е ш е н и е.

$$b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0.$$

$$x_{1,\,2} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

О т в е т. $2 < x < 3$.

П р и м е р 4. Решить неравенство

$$2x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$b^2 - 4ac = 25 - 48 = -23 < 0.$$

О т в е т. Данному неравенству удовлетворяет каждое действительное число.

П р и м е р 5. Решить неравенство

$$x^2 - 6x + 9 > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

О т в е т. Данному неравенству удовлетворяют все числа, кроме 3.

2. **Неравенства высших степеней.** Пусть дано неравенство, левая часть которого какой-нибудь многочлен, содержащий одну букву — неизвестное, а правая — нуль. В общем случае такие неравенства

решать трудно. Однако, если известно разложение многочлена на множители, такие неравенства можно решать элементарными способами.

Пример. Решить неравенство

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0.$$

Решение. Разлагая на множители левую часть, перепишем неравенство в виде

$$(x - 1)(x - 3)(x^2 + x + 1) < 0.$$

Трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет отрицательный дискриминант и его значения при всех действительных значениях x положительны, следовательно, не влияют на знак. Поэтому достаточно решить квадратное неравенство

$$(x - 1)(x - 3) < 0,$$

или

$$x^2 - 4x + 3 < 0,$$

из которого находим $1 < x < 3$.

Пример. Решить неравенство

$$(x + 6)(x - 1)(x + 1)x < 0.$$

Решение. Многочлен в левой части этого неравенства имеет следующие корни: -6, -1, 0, и 1. Его корни делят числовую ось на 5 интервалов. В этих интервалах каждый из сомножителей знакопостоянный. Знак многочлена в каждом интервале определяется по числу отрицательных сомножителей.

Множитель	Интервал				
	$(-\infty; -6)$	$(-6; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$x+6$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Как видно из таблицы, выражение, стоящее в левой части неравенства, отрицательно при $-6 < x < -1$ и $0 < x < 1$.

Ответ. $-6 < x < -1$ и $0 < x < 1$.

Примечание. Еще проще такие неравенства можно решать с помощью геометрической иллюстрации. Так как многочлен $(x+6) \times (x - 1)(x + 1)x$ не имеет кратных корней, то кривая — его график — нигде не касается оси ox, а только пересекает ее в точках,

соответствующих корням многочлена. Поэтому достаточно определить знак данного многочлена в каком-нибудь одном интервале, на которые делят числовую ось корни многочлена, чтобы узнать, в каких интервалах график данного многочлена расположен ниже оси ox, а в каких — выше, т. е. при каких значениях x данный многочлен отрицательный, а при каких положительный.

3. **Дробные неравенства.** Так как частное $\frac{A}{B}$ и произведение AB — числа одного и того же знака, то неравенство $\frac{A}{B} > 0$, где A и B — какие-нибудь многочлены, равносильно неравенству $A \cdot B > 0$. Поэтому дробное неравенство всегда можно заменить равносильным ему целым алгебраическим неравенством.

Пример. Решить неравенство

$$\frac{x-2}{(x-5)(x+3)} < 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно такому:

$$(x+3)(x-2)(x-5) < 0.$$

Корни многочлена $(x+3)(x-2)(x-5)$ равны: -3, 2 и 5.

Составляем таблицу

Множитель	Интервал			
	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Как видим, данный многочлен принимает отрицательные значения при $-\infty < x < -3$ и $2 < x < 5$ (рис. 30).

Ответ. $x < -3$ и $2 < x < 5$.

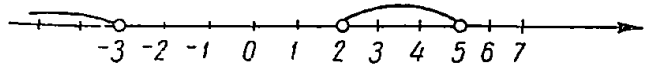


Рис. 30.

4. Иррациональные неравенства. Приступая к решению иррациональных неравенств, прежде всего необходимо установить область допустимых значений неизвестного. При этом рассматриваются только арифметические корни. Общий метод решения этих неравенств состоит в постепенном уединении радикалов и в возвышении в степень, равную показателю корня. Так можно освободиться от иррациональности. Необходимо помнить, что при возвышении в степень может получиться, что область значений неизвестного исходного неравенства будет только частью области значений неизвестного полученного неравенства. Поэтому необходимо всегда проводить проверку решения.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x.$$

Решение. Найдем область допустимых значений для x:

$$(x+2)(x-5) \geqslant 0 \text{ и } 8 - x \geqslant 0,$$

откуда получаем, что область допустимых значений будет

$$-\infty < x \leqslant -2; \quad 5 \leqslant x \leqslant 8.$$

В данной области обе части неравенства неотрицательны, возводя их в квадрат, получим неравенство

$$(x+2)(x-5) < (8-x)^2,$$

или

$$x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2,$$

откуда

$$13x < 74, \quad x < 5\frac{9}{13}.$$

Решением первоначального неравенства будет пересечение областей $-\infty < x \leqslant -2$, $5 \leqslant x \leqslant 8$ и $x < 5\frac{9}{13}$.

Ответ. $x \leqslant -2$; $5 \leqslant x < 5\frac{9}{13}$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3.$$

Решение. Определяем область существования каждого радикала:

$$\begin{array}{llll} 9 - x^2 \geqslant 0, & x^2 \leqslant 9, & -3 \leqslant x \leqslant +3; \\ 6x - x^2 \geqslant 0, & x(6-x) \geqslant 0, & 0 \leqslant x \leqslant 6. \end{array}$$

Следовательно, область существования обоих радикалов будет

$$0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Далее решаем неравенство

$$\sqrt{6x - x^2} > 3 - \sqrt{9 - x^2}; \quad 6x - x^2 > 9 - 6\sqrt{9 - x^2} + 9 - x^2,$$

или

$$6\sqrt{9 - x^2} > 18 - 6x; \quad \sqrt{9 - x^2} > 3 - x;$$
$$9 - x^2 > (3 - x)^2; \quad 9 - x^2 > 9 - 6x + x^2,$$

или

$$6x - 2x^2 > 0, \quad x(3 - x) > 0,$$

откуда 1) $x > 0$ и $3 - x > 0$, значит, $0 < x < 3$; 2) $x < 0$, $3 - x < 0$ не имеет решения.

Ответ. $0 < x < 3$.

§ 30. Тождественные неравенства

1. Определения. Всякое верное числовое неравенство, а также всякое буквенное неравенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, называется *тождественным неравенством*.

Примеры тождественных неравенств:

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} > \sqrt{10},$$
$$ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2},$$
$$x^2 + x + 1 > 0.$$

2. Некоторые замечательные неравенства.

1) $|a_1 + a_2 + \cdots a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$,

т. е. модуль суммы любых чисел не больше суммы их модулей.

2) Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа положительные, то

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

т. е. *среднее геометрическое* нескольких положительных чисел не больше их *среднего арифметического*.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда все числа a_1, $a_2, \ldots, a_n$ равны.

3) Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа положительные, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

т. е. среднее арифметическое нескольких положительных чисел не больше их *среднего квадратического*.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда все числа a_1, a_2, ..., a_n равны.

4) Если a_1, a_2, ..., a_n — числа положительные, то

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

т. е. *среднее гармоническое* несколько положительных чисел не больше их среднего геометрического.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда все числа a_1, a_2, ..., a_n равны.

5) $$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

какие бы ни были числа a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n. Знак равенства здесь имеет место лишь в том случае, когда

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

6) Если $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \ldots \leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Если же $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, но $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

В обоих случаях равенство имеет место лишь тогда, когда

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ и } b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

7) При любых действительных a_1, a_2, ..., a_n

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Равенство имеет место только при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

8) При любых действительных a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|.$$

Равенство имеет место лишь тогда, когда каждое из чисел a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n равно нулю.

9) При всех действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

Равенство имеет место лишь в том случае, когда

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

10) При любых действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

Равенство имеет место лишь при условии, что

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

11) При положительном a и любом рациональном $r > 1$

$$(1+a)^r > 1+ra.$$

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 31. Функциональная зависимость величин

1. Постоянные и переменные величины. Наблюдая какой-либо процесс, можно заметить, что одни величины, встречающиеся в нем, изменяют свое значение, другие — не изменяют. Величины, которые в данном процессе все время сохраняют одно и то же значение, называют *постоянными*. Величины, значения которых в данном процессе изменяются, называют *переменными*.

Пример. Во время взлета самолета расстояние его от поверхности земли увеличивается, количество бензина в баках уменьшается, а число пассажиров, длина самолета остаются постоянными.

Одна и та же величина в одном процессе может быть постоянной, а в другом — переменной. Однако есть и такие величины, которые остаются постоянными все время, например отношение длины окружности к ее радиусу, сумма углов треугольника, температура кипения воды и т. д. Такие величины называют *константами*.

Обычно постоянные величины обозначают первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d, а переменные — последними: x, y, z.

Изменяясь, переменная величина не всегда может принимать произвольные значения, а только такие значения, которые находятся в некоторых допустимых для нее пределах. Все те значения, которые величина может принимать в конкретных условиях рассматриваемого процесса, называются *допустимыми значениями* для данной переменной величины.

2. Функциональная зависимость. Часто бывает так, что одна переменная величина зависит от другой: каждое изменение значений одной величины влечет за собой соответствующие изменения значений другой. Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой, то говорят, что между этими переменными существует *функциональная зависимость*.

Примеры функциональной зависимости.

Радиус окружности и ее длина, вес покупки и ее стоимость, вес тела и его расстояние от центра Земли и др.

Прямо пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости величин (см. стр. 131) являются отдельными видами функциональной зависимости.

3. Аргумент и функция. Если две переменные величины находятся в функциональной зависимости, то та из них, которая может принимать произвольные допустимые значения, называется *независимой переменной*, или *аргументом*. Другая величина, значения которой зависят от значений аргумента, называется *зависимой переменной*, или *функцией*.

Пример. Известно, что чем выше температура, тем больше становится длина стального рельса, т. е. длина рельса зависит от температуры. В данном случае температура — аргумент, а длина рельса — функция.

Еще примеры.

Площадь квадрата есть функция длины его стороны, путь, пройденный поездом,— функция времени, урожайность — функция количества удобрений, значения трехчлена $x^2 + 5x + 6$ — функция значений x.

Если величина y есть функция величины x, пишут: $y = f(x)$ и читают: «y равно эф от x». Для обозначения функциональной зависимости употребляют и другие буквы. Например, если v есть функция t, можно записать и так: $v = \varphi(t)$ («v равно фи от t»).

4. Способы задания функции. Функцию можно задать формулой, показывающей, как по данному значению аргумента можно вычислить соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называют *аналитическим*.

Пример. Зависимость объема куба v от длины его ребра a можно выразить формулой $v = a^3$. Эта формула показывает, как для каждого значения a можно вычислить соответствующее значение v. Например, если $a = 4$, то $v = 64$ и т. д.

В зависимости от того, какой формулой выражается та или иная функция, рассматривают различные виды функций. В элементарной математике рассматриваются такие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, вычисление синусов, косинусов, тангенсов, котанген-

сов, секансов, косекансов, арксинусов, арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов, арксекансов и арккосекансов. Эти действия называют *элементарными действиями*. Действия сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с рациональным показателем, извлечение корня называют также *алгебраическими действиями*. Остальные элементарные действия называют элементарными *трансцендентными*. Если функцию можно задать формулой, содержащей только алгебраические действия, ее называют *алгебраической функцией*. Если функцию можно задать формулой, содержащей элементарные действия, в состав которых входят и элементарные трансцендентные действия, то ее называют *элементарной трансцендентной функцией*.

Функцию можно задать также *табличным* способом, т. е. указать значение аргумента и для каждого из них дать соответствующие значения функции. Например, таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и другие есть не что инсе как табличные задания функций.

Очень распространен также *графический* способ задания функций *. Обычно для этого используют прямоугольную систему координат.

5. Координаты. Совокупность двух взаимно перпендикулярных числовых осей с общей начальной точкой O называют *прямоугольной системой ксординат* (рис. 31). Одну из этих осей, обычно горизон-

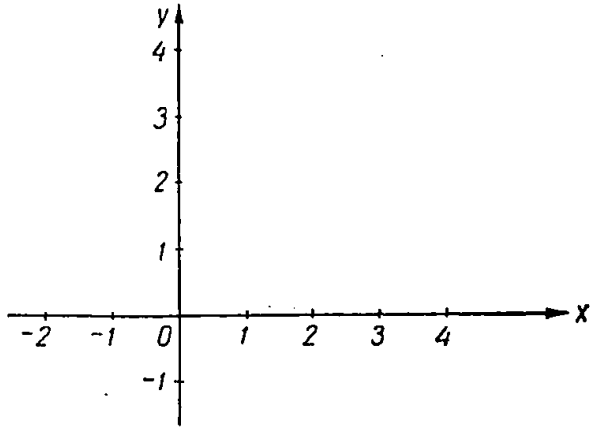


Рис. 31.

тальную, называют *осью абсцисс*, или осью иксов, или осью OX, вторую, вертикальную, называют *осью ординат*, или осью игреков, или осью OY. Плоскость, в которой задана система координат, называют

* Существуют и другие способы задания функций; описательный, с помощью функциональной шкалы и т. п.

координатной плоскостью, а точку O пересечения осей — *началом координат*.

На координатной плоскости положение любой точки можно определить с помощью двух чисел. Пусть, например, надо определить положение точки M (рис. 32). Для этого опускаем из нее перпендикуляры на оси OX и OY. Если основаниям этих перпендикуляров соответствуют числа 3 и 2, то эта пара чисел и определяет положение точки M.

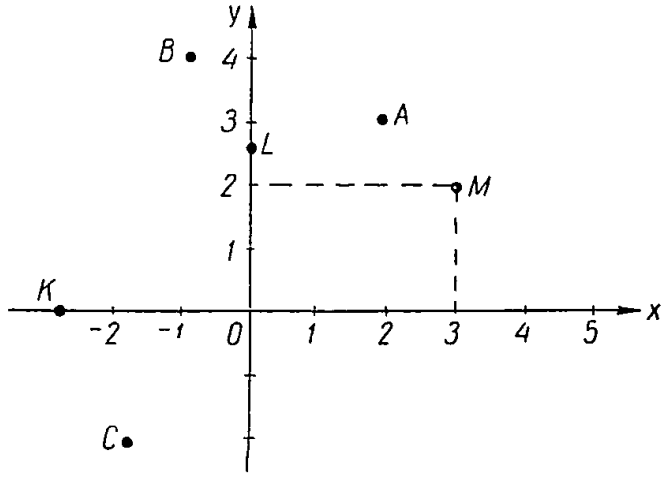


Рис. 32.

Числа, определяющие положение точки на координатной плоскости, называются *координатами*. Координату, которую берут по оси абсцисс, называют *абсциссой*, которую берут по оси ординат — *ординатой*. Если точка N имеет абсциссу a и ординату b, пишут: $N(a, b)$ (первой всегда пишут абсциссу).

Обозначенные на рис. 32 точки имеют следующие координаты:

$$A(2, 3);\quad B(-1, 4);\quad C(-2, -2);\quad K(-3, 0);\quad L\left(0, 2\frac{1}{2}\right).$$

6. **Графическое изображение функции.** Пусть имеем какую-нибудь ць функцию $y = f(x)$. Отметим каждое значение ее аргумента на оси абсцисс, а соответствующее ему значение функции — длиной перпендикуляра, проведенного к оси абсцисс из этой точки. Тогда при всевозможных изменениях аргумента концы перпендикуляров образуют некоторое множество точек, которое называется графиком данной

функции. Чаще всего графиком функции является некоторая линия. Однако он может состоять из отдельных точек, отрезков, дуг и т. д.

Если функция задана графиком, то можно легко определить для каждого (допустимого) значения аргумента соответствующее значение функции. Для этого достаточно восстановить в соответствующей точке оси абсцисс перпендикуляр к ней и продолжить его до пересечения с графиком. Ордината точки пересечения и дает соответствующее значение функции.

Простейший способ построения графика функции — «по точкам». Рассмотрим его на примере. Пусть надо построить график функции $y = x^2 - 2$. Для этого вычисляем значения функции для нескольких значений аргумента, например для —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3. Результаты удобно записывать в виде таблицы:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	7	2	—1	—2	—1	2	7

Каждую пару полученных значений x и y принимаем за координаты и строим по ним на координатной плоскости точки. Затем через эти точки (от руки или при помощи лекала) проводим плавную линию. Это и будет график данной функции $y = x^2 - 2$ (рис. 33)*.

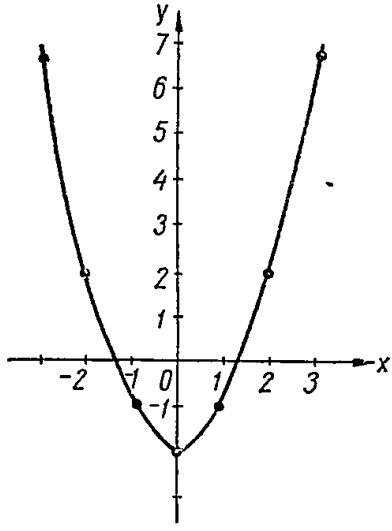


Рис. 33.

Для построения графиков удобно пользоваться миллиметровой бумагой.

7. **Возрастающие и убывающие функции.** Функция называется *возрастающей*, если для двух произвольных значений аргумента большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Иначе: если при $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется возрастающей. Если при $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *убывающей*. Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными функциями*.

Если указанным свойством функция обладает только на некоторых промежутках области ее определения, то ее называют соответственно возрастающей или убывающей на этих промежутках.

---

* Однако в большинстве случаев удобнее строить графики функций, используя их свойства.

Примеры. Функция $y = x^3 + 5$ возрастающая; функция $y = x^2$ возрастающая при $x > 0$ и убывающая при $x < 0$.

8. **Ограниченные и неограниченные функции.** Функция называется *ограниченной*, если абсолютное значение ее при любых значениях аргумента не превосходит какого-либо положительного числа A. Иначе: функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если существует такое положительное A, что при всех x

$$|f(x)| \leqslant A.$$

График ограниченной функции лежит целиком в полосе между прямыми, параллельными оси OX, проведенными на расстояниях A от нее.

Пример. Функция $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ограниченная, так как $0 < y \leqslant 1$ при всех x.

Если не существует такого положительного числа A, что при всех значениях x $|f(x)| \leqslant A$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*.

Пример. Функция $y = x^3$ неограниченная.

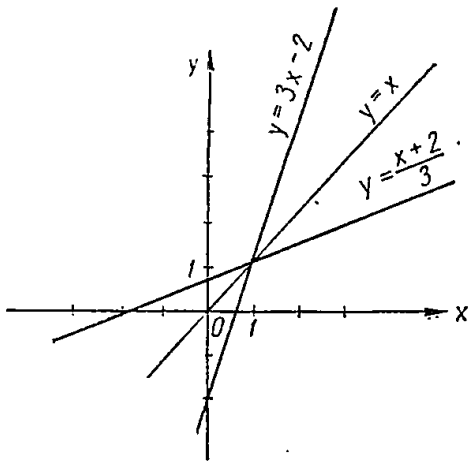


Рис. 34.

9. **Четные и нечетные функции.** Функция называется *четной*, если любым противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. Иначе: если для любых x $f(-x) = f(x)$, то функция $f(x)$ называется четной.

Пример. Функция $y = x^2$ — четная, так как при любых x

$$(-x)^2 = x^2.$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Если любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции, то такая функция называется *нечетной*. Иначе: функция $f(x)$ называется нечетной, если при любых значениях x $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$.

Существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Такими, например, есть функции

$$y = x^3 + x^2, \quad y = \frac{x-1}{x^2+1} \text{ и др.}$$

10. Прямая и обратная функции. Пусть дана функция $y = 3x-2$. 2.
Если выразить x через y и в полученном равенстве вместо x написать y, а вместо y написать x, будем иметь $y = \frac{x+2}{3}$. Это есть функция, *обратная* данной. Данную функцию также можно назвать обратной по отношению к полученной. Эти функции взаимно обратны друг другу.

Графики двух взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. относительно прямой $y = x$ (рис. 34).

§ 32. Простейшие функции и их графики

1. Прямая пропорциональность. Зависимость между величинами x и y, которую можно выразить формулой

$$y = ax,$$

где a — некоторое данное число, называется *прямо пропорциональной зависимостью*.

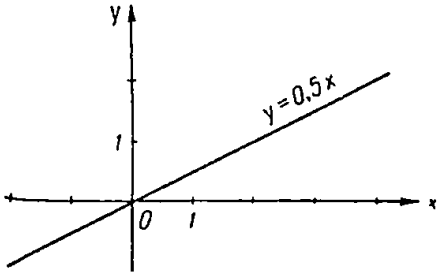


Рис. 35.

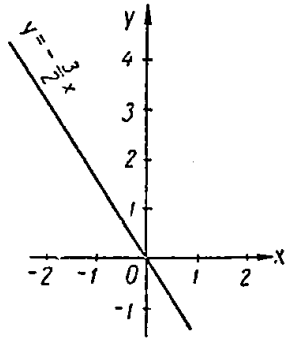


Рис. 36.

Примечание. В арифметике рассматривают только такие примеры прямо пропорциональной зависимости, в которых a (коэффициент пропорциональности), x и y — числа положительные. В алгебре рассматривают и такие зависимости, в которых эти числа могут быть и отрицательными и равными нулю. Поэтому то определение прямо

пропорциональной зависимости, которое дано на стр. 131, для алгебры не подходит.

Графиком прямо пропорциональной зависимости есть прямая, проходящая через начало координат. График зависимости $y = ax$ проходит в первом и третьем координатных углах, если $a > 0$ (рис. 35) или во втором и четвертом координатных углах, если $a < 0$ (рис. 36).

2. **Линейная функция.** Линейной функцией называют функцию, которую можно выразить формулой

$$y = ax + b,$$

где x — аргумент, а a и b — заданные числа.

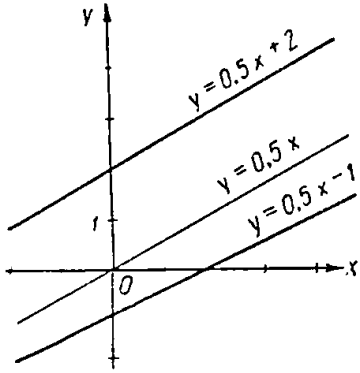


Рис. 37.

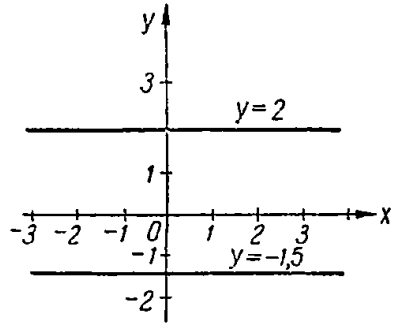


Рис. 38.

Линейная функция возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$. График линейной функции есть прямая линия, проходящая через точку $M(0, b)$ параллельно графику функции $y = ax$ (рис. 37). Если $a = 0$, график линейной функции есть прямая, параллельная оси абсцисс, которая проходит через точку b на оси ординат (рис. 38).

Прямо пропорциональная зависимость есть частный случай линейной функции (при $b = 0$).

3. **Обратно пропорциональная зависимость.** Зависимость между ду величинами x и y, которую можно выразить формулой

$$y = \frac{a}{x},$$

где a — некоторое заданное число, называют *обратно пропорциональной зависимостью*. Здесь a, x, y могут быть не только положительными числами (как в арифметике), но и отрицательными. Поэтому приведенное здесь определение более общее, чем давалось в арифметике (см. стр. 132).

Графиком обратно пропорциональной зависимости есть кривая линия, состоящая из двух отдельных веток, расположенных в первом и третьем координатных углах при $a > 0$ (рис. 39), или во втором и четвертом — при $a < 0$ (рис. 40). Эта линия называется равносторонней *гиперболой*. Она симметрична относительно начала координат, так как функция $y = \frac{a}{x}$ нечетная. Эта функция неограниченна. При $x > 0$ и $x < 0$ эта функция убывающая, если $a > 0$, и возрастающая, если $a < 0$; при $x = 0$ функция эта не определена, так как $x = 0$ не принадлежит области допустимых значений аргумента.

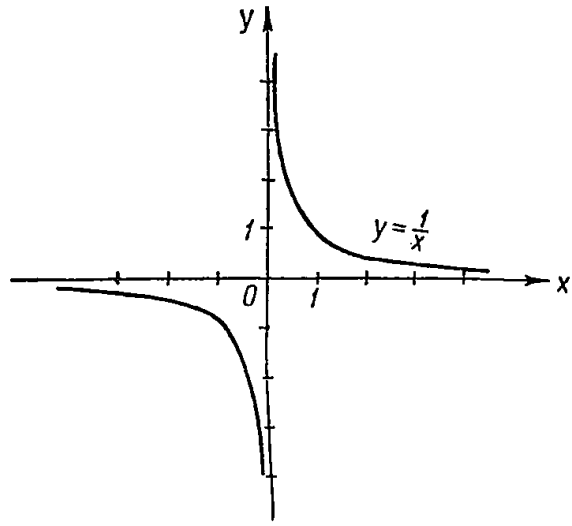


Рис. 39.

4. Квадратичная функция. *Квадратичной* (или квадратной) называют функцию, которую можно выразить формулой

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где x — аргумент; $a \neq 0$, b, c — постоянные величины.

Простейшей квадратичной функцией есть функция вида $y = x^2$. Это — неограниченная четная функция, определенная для всех действительных значений аргумента x. При $x > 0$ она возрастающая, а при $x < 0$ — убывающая. Ее график (рис. 41) есть кривая линия, называемая *парабо-*

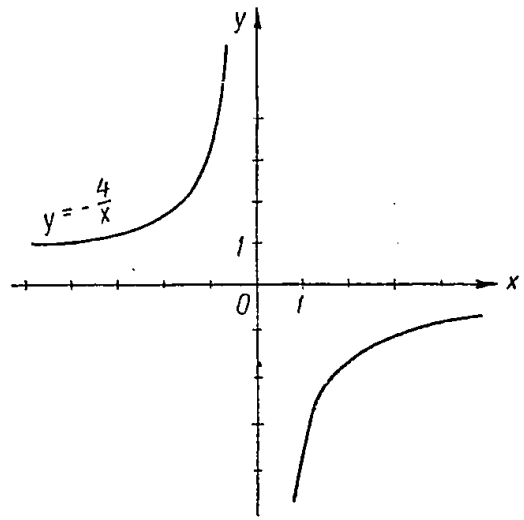


Рис. 40.

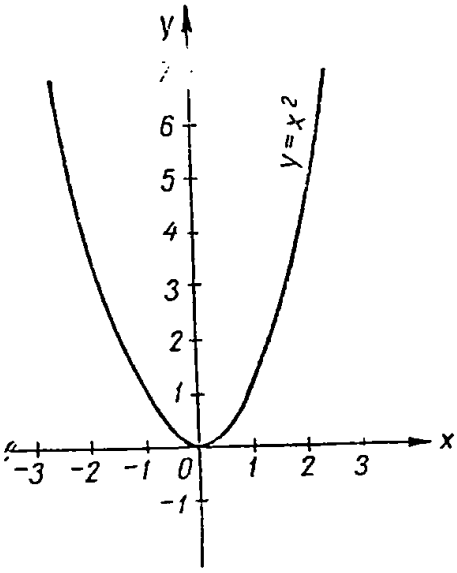


Рис. 41.

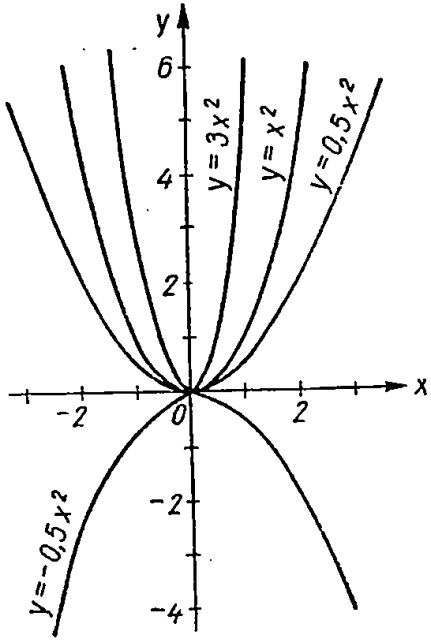


Рис. 42.

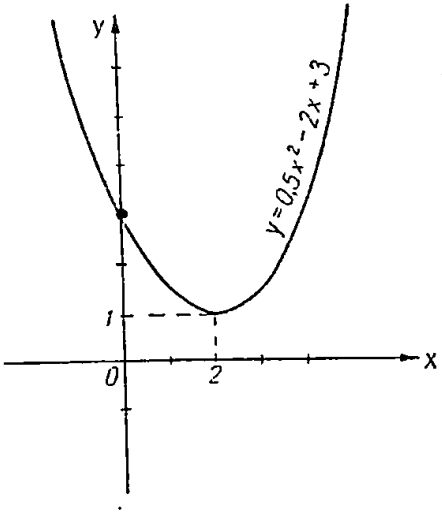


Рис. 43.

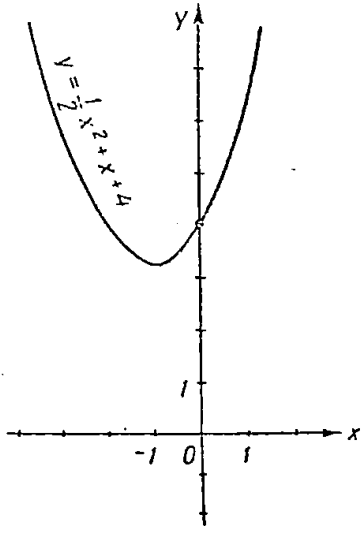


Рис. 44.

лой. Она проходит через начало координат, симметрична оси ординат, ее ветки направлены вверх.

Квадратичная функция вида $y = ax^2$ также четная, неограниченная, определенная для всех действительных x. Ее график также парабола, проходящая через начало координат и симметрична оси ординат. Но при положительных a ветки ее направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Чем меньше абсолютная величина a, тем дальше отходят ветки параболы от оси ординат, тем «шире» она (рис. 42).

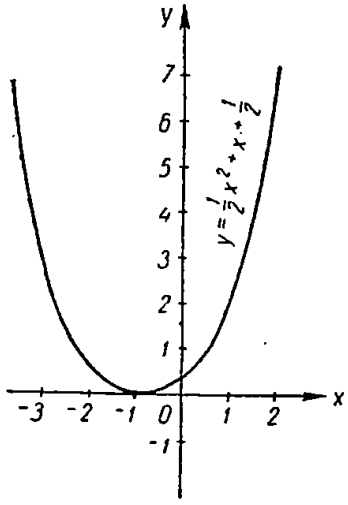


Рис. 45.

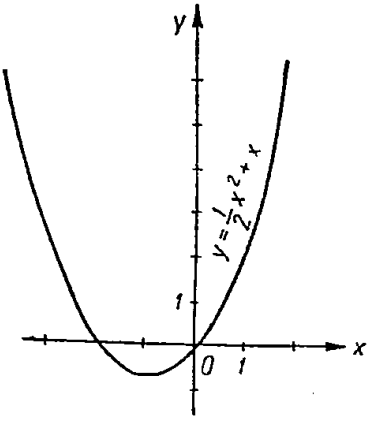


Рис. 46.

График квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$ — такая же парабола, как и график функции $y = ax^2$, ее ветки также направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$, ее ось симметрии параллельна оси ординат. Только вершина этой параболы (рис. 43) находится не в начале координат, а в точке

$$\left(-\frac{b}{2a};\ c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, т. е. $b^2 - 4ac < 0$, то график функции $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось абсцисс (рис. 44). Если он равен нулю, график функции касается оси абсцисс, причем точка касания есть корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 45). Если дискриминант положительный, парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, являющихся корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 46).

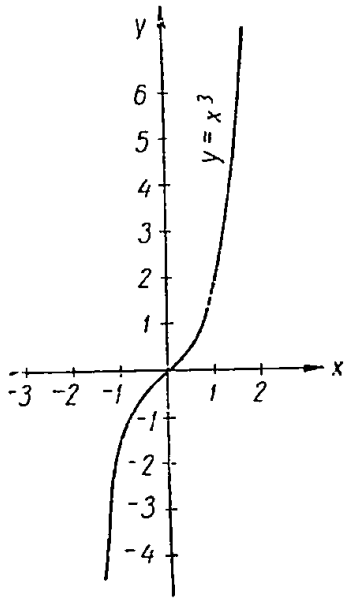


Рис. 47.

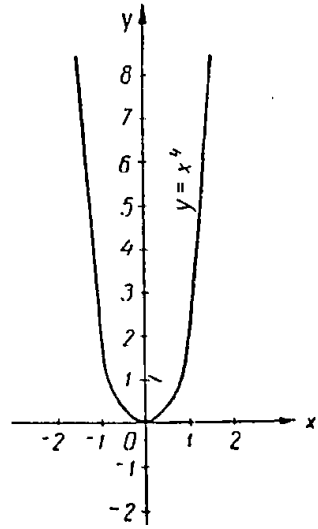


Рис. 48.

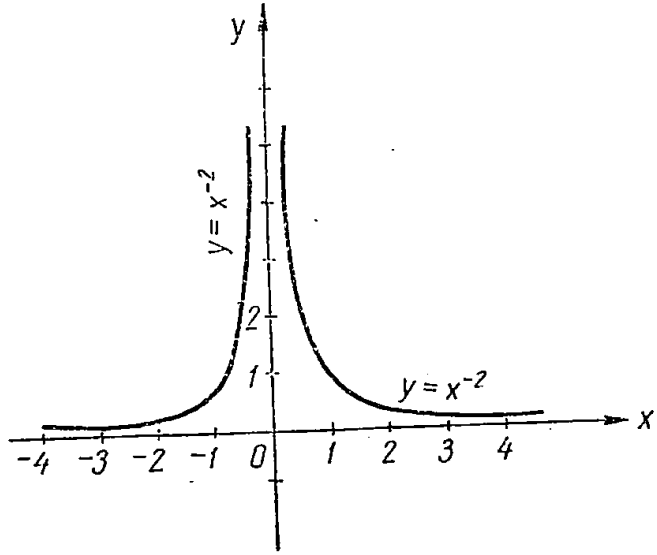


Рис. 49.

5. Степенная функция. Степенной называют функцию, которую можно выразить формулой $y = x^n$, где x — аргумент, а n — показатель степени.

При n, равном 1, 2, —1, имеем соответственно функции

$$y = x, \quad y = x^2 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x},$$

уже рассмотренные ранее (стр. 305 и 307).

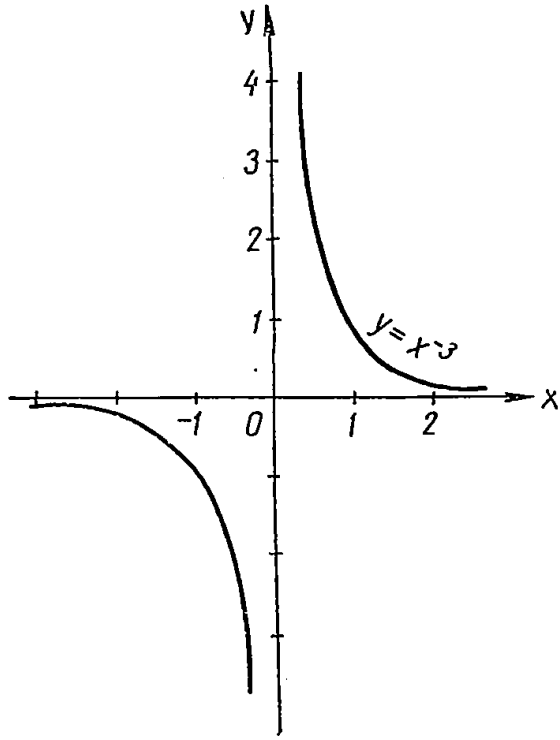


Рис. 50.

Если n — число целое четное, то функция $y = x^n$ четная; при нечетных n она нечетная. При положительных n эта функция определена для всех действительных значений аргумента x, при отрицательных n она определена для всех x, кроме $x = 0$. На рис. 47—50 даны графики степенной функции при показателях, соответственно равных 3, 4, —2, —3.

Если $n = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то при четном знаменателе q функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ определена только для положительных значений x. При нечетном знаменателе q эта функция определена для всех значений x, если $\frac{p}{q} > 0$; если же $\frac{p}{q} < 0$, то она определена для всех x, кроме $x = 0$. Если q нечетное, то функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ четная при четном p и нечетная при нечетном p.

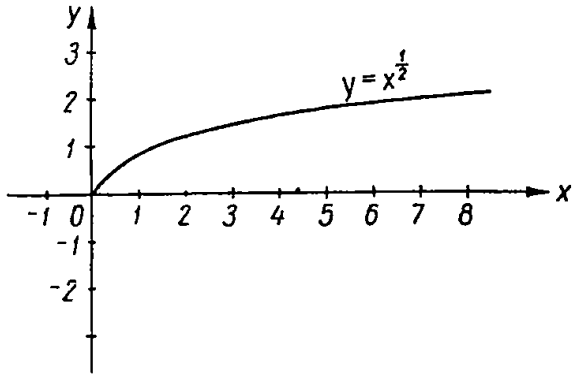


Рис. 51.

На рис. 51—53 даны графики степенных функций при показателях соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

При любом $n \neq 0$ степенная функция неограниченна, график каждой из этих функций проходит через точку (1, 1).

Если n — число иррациональное, то функция $y = x^n$ определена только для положительных значений аргумента x (или для неотрицательных x, если $n > 0$).

6. Показательная функция. *Функция, которую можно выразить формулой $y = a^x$, где x — аргумент, а a — положительное число, называется показательной функцией.*

Эта функция определена для любых действительных x.

Примечание. Число a здесь берется положительным потому, что при отрицательных a числа $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}}$ и многие другие не были бы действительными. Если a положительное, а x равен несократимой дроби

с четным знаменателем, то a^x имеет два действительных значения, например $9^{\frac{1}{2}}$ имеет два значения: 3 и —3. Однако значения функции $y = a^x$ берутся только положительные: каждому действительному

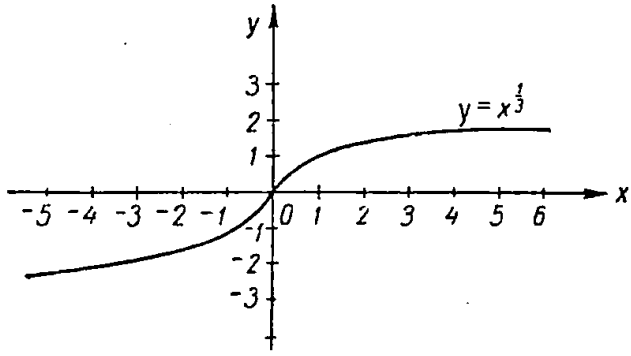


Рис. 52.

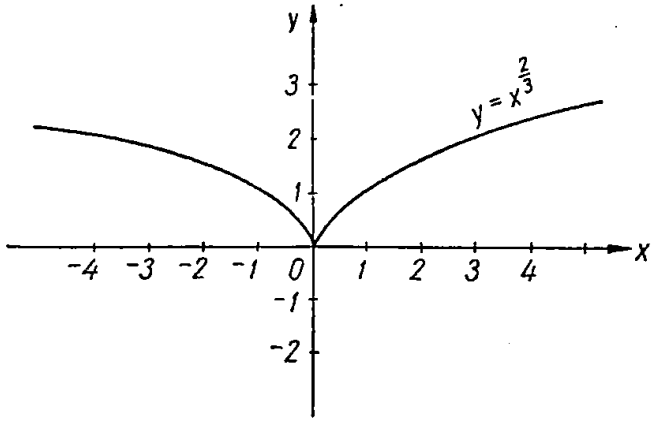


Рис. 53.

значению x соответствует только одно положительное значение показательной функции a^x.

Показательная функция при любом основании a положительная. При $a > 1$ эта функция возрастающая, а при $a < 1$ — убывающая. График показательной функции — кривая, проходящая через точку (0, 1).

Он неограниченно приближается к оси абсцисс, но не достигает ее. Графики функций $y = a^x$ и $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

На рис. 54 даны графики трех показательных функций:

$$y = 2^x, \quad y = 0{,}5^x \quad \text{и} \quad y = 5^x.$$

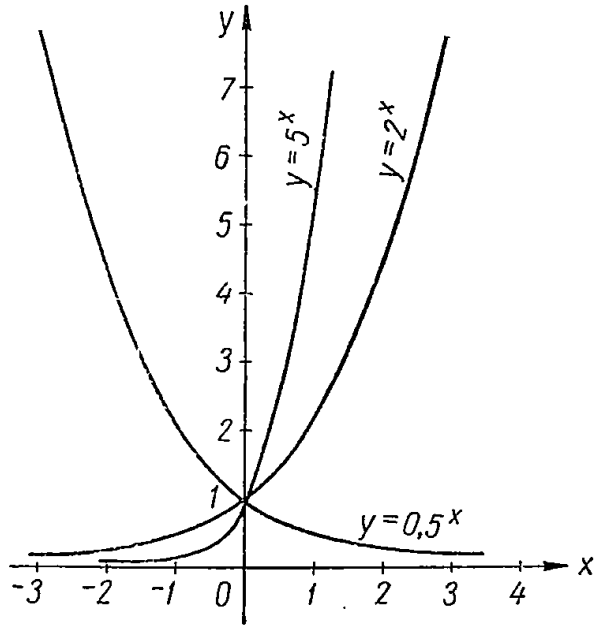


Рис. 54.

§ 33. Графические способы решения уравнений и неравенств

1. Системы уравнений с двумя неизвестными. С помощью графиков функций можно сравнительно легко находить (вообще говоря, приближенные) действительные решения систем двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого каждое из уравнений рассматриваем как функциональную зависимость между его неизвестными, строим графики этих двух зависимостей на одной координатной плоскости и находим точку их пересечения. Абсцисса и ордината точки пересечения графиков дают решение системы.

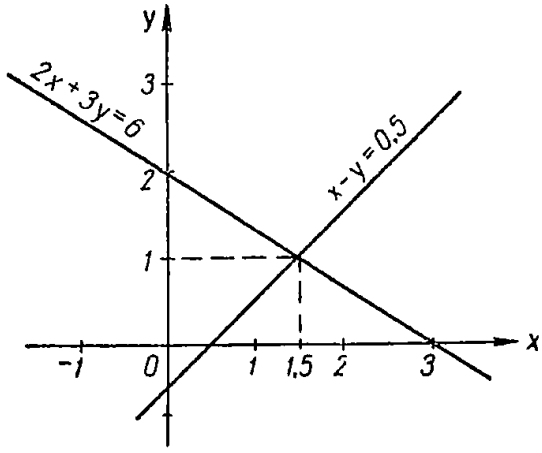


Рис. 55.

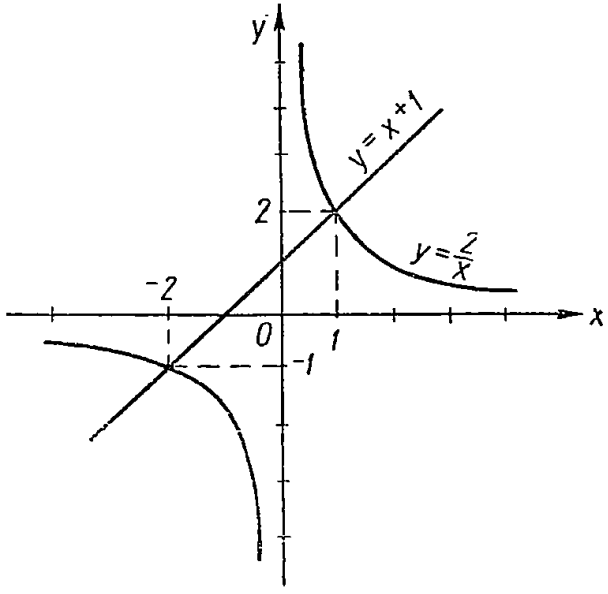


Рис. 56.

Пример 1. Решить систему уравнений (графически)

$$\begin{cases} x - y = 0{,}5, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Решение. Каждое из этих уравнений линейное, следовательно, их графики — прямые линии. Строим на одной координатной плоскости графики этих уравнений (рис. 55). Они пересекаются в одной точке с координатами 1,5 и 1.

Ответ. Данная система имеет одно решение: $x = 1{,}5$, $y = 1$.

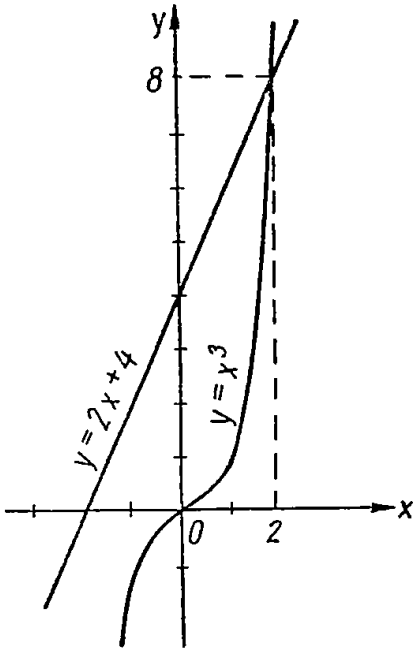


Рис. 57.

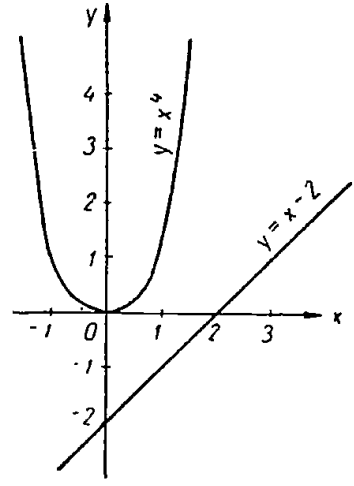


Рис. 58.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} xy = 2, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Решение. Данные уравнения можно преобразовать так:

$$y = \frac{2}{x} \text{ и } y = x + 1.$$

График первого уравнения есть гипербола, а второго—прямая (рис. 56). Они пересекаются в двух точках (1; 2) и (—2; —1).

Ответ. Система имеет два решения: $x_1 = 1$; $y_1 = 2$ и $x_2 = -2$; $y_2 = -1$.

2. Графическое решение уравнений с одним неизвестным.

Пример 1. Решить графическим способом уравнение

$$x^3 - 2x - 4 = 0.$$

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$x^3 = 2x + 4.$$

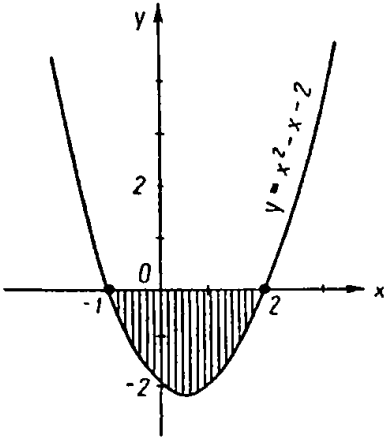


Рис. 59.

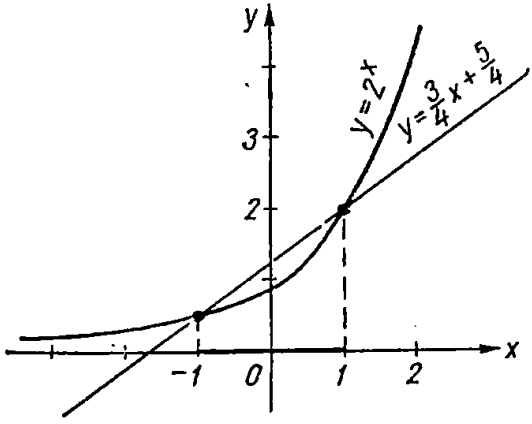


Рис. 60.

Обозначим каждую его часть буквой y и решим систему полученных двух уравнений с двумя неизвестными (рис. 57):

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 2x + 4. \end{cases}$$

Как видим, графики пересекаются в одной точке с абсциссой 2.

Ответ. Данное уравнение имеет один действительный корень $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 - x + 2 = 0.$$

Решение. $x^4 = x - 2$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y = x^4, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Построив графики каждого из уравнений (рис. 58), видим, что они не имеют общих точек.

Ответ. Данное уравнение действительных решений не имеет.

3. Графическое решение неравенств с одним неизвестным.
Пример 1. Решить неравенство

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Решение. Построив график функции $y = x^2 - x - 2$ (рис. 59), видим, что y отрицательный только при

$$-1 < x < 2.$$

Ответ. $-1 < x < 2$.
Пример 2. Решить неравенство

$$2^{x+2} < 3x + 5.$$

Решение. Разделив обе части его на 4, получим $2^x < \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. Обозначим $y_1 = 2^x$, $y_2 = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ и построим на одной координатной плоскости графики этих двух функций (рис. 60). Как видим, y_1 меньше соответствующего значения y_2 для x из промежутка $(-1; 1)$.
Ответ. $-1 < x < 1$.

§ 34. Логарифмы

1. Определение логарифма. Логарифмом числа N по данному основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N.

Обозначение: $\log_a N = x$. Таким образом, по определению, если $x = \log_a N$, то $a^x = N$, или $a^{\log_a N} = N$. Основание a предполагается положительным и не равным единице.

Примеры. $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 0{,}25 = -2$, так как $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Знаком lg без указания основания обозначается *десятичный* логарифм, т. е., логарифм при основании 10, знаком log без указания основания — логарифм по произвольному основанию (в пределах одной формулы это основание мыслится одним и тем же) *.

---

* Для теоретических исследований наиболее пригодным основанием логарифмов является иррациональное число $e = 2{,}71828183...$ (В высшей математике буквой e обозначают $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Логарифмы с основанием e называются *натуральными логарифмами*. Их принято обозначать символом ln. Например, $\ln x$ обозначает то же, что и $\log_e x$.

Логарифм — слово греческое, оно состоит из двух слов: λόγος — отношение, ἀριθμός — число. Слово «логарифм», таким образом, в буквальном переводе обозначает число, изменяющее отношение.

2. **Логарифмическая функция.** Функция, которую можно выразить формулой $y = \log_a x$, где x — аргумент, а $a \neq 1$ положительное число, называется *логарифмической функцией.*

Примеры логарифмических функций:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_\pi x,\ y = \log_{10} x.$$

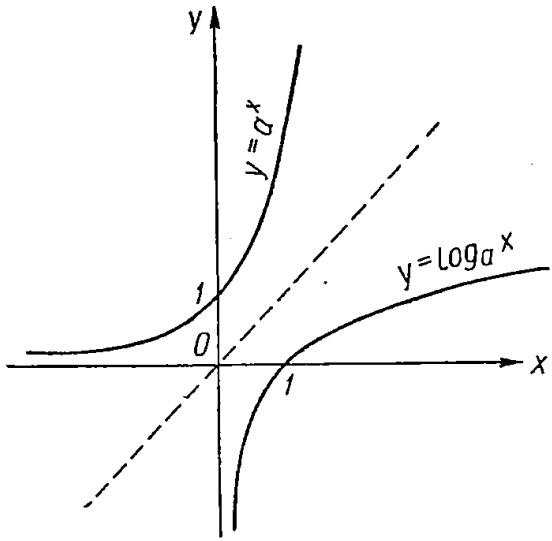


Рис. 61.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обратная показательной функции $y = a^x$. Поэтому их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 61).

На рис. 62 даны графики следующих логарифмических функций:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ и } y = \log_5 x.$$

3. **Свойства логарифмов.** а) Всякое положительное число по любому * основанию имеет единственный логарифм.

* Здесь и дальше мы имеем в виду любое положительное, не равное единице, основание логарифмов (см. определение логарифма, стр. 318). Логарифмы рассматриваем только действительные.

б) При любом основании отрицательные числа не имеют логарифмов.

в) При любом основании логарифм единицы равен нулю.

г) Логарифм самого основания равен единице.

д) При основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм, при этом логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

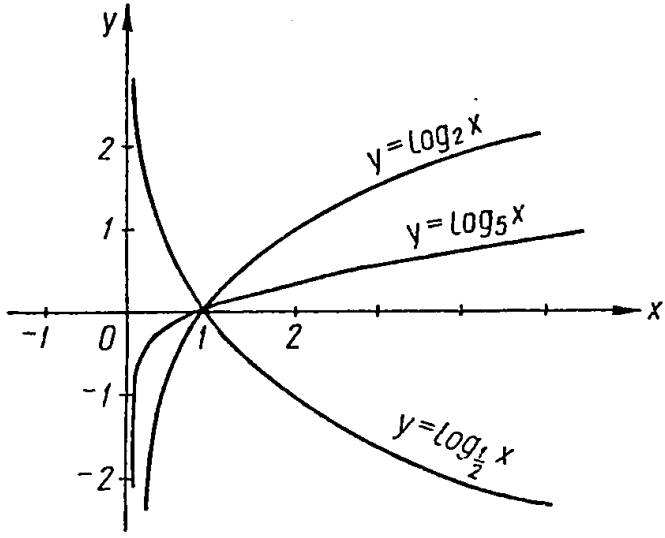


Рис. 62.

При основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм, при этом логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логарифмы чисел, больших единицы, отрицательны.

е) Если основание логарифмов больше единицы, то при неограниченном возрастании числа неограниченно возрастает и его логарифм, а при стремлении числа (положительного) к нулю его логарифм, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по абсолютной величине.

ж) Если основание логарифмов меньше единицы, то при неограниченном возрастании числа его логарифм, оставаясь отрицательным, неограниченно убывает, а при стремлении положительного числа к нулю, его логарифм неограниченно возрастает.

Все эти свойства нетрудно «увидеть», рассматривая графики логарифмических функций при разных основаниях. Однако их можно доказать и аналитически, не обращаясь к графикам.

4. Решение примеров с использованием свойств логарифмов.

Пример 1. Исходя из определения логарифма, найти:

а) Какое число имеет логарифм 2 при основании 7?

б) Найти логарифм 125 по основанию 5.

в) При каком основании логарифм числа 16 равен 4?

Решение.

$$\text{а) } 2 = \log_7 x, \qquad x = 7^2 = 49;$$
$$\text{б) } x = \log_5 125, \qquad 5^x = 125, \quad x = 3;$$
$$\text{в) } 4 = \log_x 16, \qquad x^4 = 16, \quad x = 2.$$

Пример 2. На основании тождества $a^{\log_a N} = N$ найти: а) $36^{\log_6 2}$; б) $81^{0{,}5 \log_9 7}$; в) $2^{\log_2 5+1}$.

Решение.

$$\text{а) } 36^{\log_6 2} = 6^{2 \log_6 2} = 6^{\log_6 2^2} = 2^2 = 4;$$

$$\text{б) } 81^{0{,}5 \log_9 7} = [(9^2)^{\frac{1}{2}}]^{\log_9 7} = 9^{\log_9 7} = 7;$$

$$\text{в) } 2^{\log_2 5+1} = 2^{\log_2 5} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10.$$

Пример 3. Что больше: $\log_a 2$ или $\log_a 3$?

Решение. Если $a > 1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. $\log_a 2 < \log_a 3$. Если $a < 1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. $\log_a 2 > \log_a 3$. Здесь предполагается, что

$$a > 0, \quad a \neq 1.$$

Пример 4. Определить x, если:

а) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$; б) $\log_x 0{,}125 = -2$; в) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}$.

Решение.

а) $(3\sqrt{3})^x = \frac{1}{27}$, $(\sqrt{27})^x = 27^{-1}$, $(27)^{\frac{x}{2}} = 27^{-1}$, $\frac{x}{2} = -1$, $x = -2$;

б) $x^{-2} = 0{,}125$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{8}$, $x^2 = 8$, $x = 2\sqrt{2}$;

в) $x = (3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}$.

Пример 5. Определить x из уравнений:

а) $5 \log_2 x - 6 = 2 \log_2 x$; б) $(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x + 2 = 0$.

Р е ш е н и е.

а) $5\log_2 x - 6 = 2\log_2 x$, $3\log_2 x = 6$, $\log_2 x = 2$, $x = 2^2 = 4$;

б) $\log_3 x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, $(\log_3 x)_1 = 2$, $(\log_3 x)_2 = 1$,

$$x_1 = 3^2 = 9 \text{ и } x_2 = 3^1 = 3.$$

5. Переход от одного основания логарифмов к другому. Если и надо перейти от логарифмов с основанием a к логарифмам с основанием b, пользуются следующим тождеством:

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N.$$

Множитель $\frac{1}{\log_a b}$ называют *модулем перехода.*

Рассмотрим более подробно, как переходить от десятичных логарифмов к натуральным и наоборот.

Чтобы по известному десятичному логарифму числа N найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа N на десятичный логарифм числа e (последний равен 0,4343...).

Величина $\lg e = 0{,}4343...$ называется *модулем десятичных логарифмов* и обозначается буквой M, так что

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N.$$

Например, из таблиц десятичных логарифмов имеем (см. стр. 31):

$$\lg 2 = 0{,}3010. \text{ Отсюда } \ln 2 = \frac{1}{M} \cdot 0{,}3010 = 0{,}6932.$$

Чтобы по известному натуральному логарифму числа N найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм на модуль десятичных логарифмов $M = \lg e$:

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N = M \cdot \ln N = 0{,}4343N.$$

Например, $\ln 3 = 1{,}0986$, а отсюда $\lg 3 = M \cdot 1{,}0986 = 0{,}4771$.

Очень часто в логарифмических преобразованиях пользуются также следующими формулами:

$$\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}; \quad \log b^n a^n = \log_b a; \quad \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

П р и м е р 1. Что больше, $\log_4 3$ или $\log_{16} 9$?

Р е ш е н и е. Используя формулу $\log_{b^n} a^n = \log_b a$, получаем

$$\log_{16} 9 = \log_{4^2} 3^2 = \log_4^3.$$

Пример 2. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} 8$, зная, что $\log_2 3 = a$.

Решение.

$$\log_{\sqrt{3}} 8 = \log_3 64 = \frac{1}{\log_{64} 3} = \frac{1}{\log_{2^6} 3} = \frac{1}{\frac{1}{6}\log_2 3} = \frac{6}{\log_2 3} = \frac{6}{a}.$$

§ 35. Логарифмирование и потенцирование

1. Логарифмирование. Логарифмировать алгебраическое выражение — значит выразить логарифм его через логарифмы отдельных чисел, входящих в это выражение. Это можно сделать, используя теоремы о логарифме произведения, частного, степени и корня.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log a^m = m \log a.$$

Логарифм корня равен частному от деления логарифма подкоренного числа на показатель корня:

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Примечание. При логарифмировании алгебраических выражений надо иметь в виду, что логарифм суммы не равен сумме логарифмов, т. е. нельзя вместо $\log (a + b)$ писать $\log a + \log b$. Нельзя также вместо $\log (a - b)$ писать $\log a - \log b$.

Логарифмирование алгебраических выражений проиллюстрируем на примерах.

Примеры. Прологарифмировать следующие выражения:

а) $x = 3bc$; $\log x = \log 3 + \log b + \log c$.

б) $x = \frac{a}{bc}$; $\log x = \log a - \log (bc) = \log a - (\log b + \log c) =$

$= \log a - \log b - \log c.$

в) $x = a^3 b^2$; $\log x = \log a^3 + \log b^2 = 3 \log a + 2 \log b.$

г) $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{2b^2c}}$; $\log x = \frac{1}{4} \log \frac{a^3}{2b^2c} = \frac{1}{4} (\log a^3 - \log 2b^2c) =$

$= \frac{1}{4} [3 \log a - (\log 2 + \log b^2 + \log c)] = \frac{1}{4} (3 \log a - \log 2 -$

$- 2 \log b - \log c).$

д) $x = 15p^2 \sqrt[4]{2p^2 (p-q)^3}$; $\log x = \log 15 + 2 \log p + \frac{1}{4} [\log 2 +$

$+ 2 \log p + 3 \log (p-q)] = \log 15 + 2 \log p + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{2} \log p +$

$+ \frac{3}{4} \log (p-q) = \log 15 + \frac{5}{2} \log p + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{3}{4} \log (p-q).$

е) $x = \frac{6a \sqrt{2(a-b)c}}{5(a-b)^2}$; $\log x = \log 6 + \log a + \frac{1}{2} [\log 2 + \log (a-b) +$

$+ \log c] - \log 5 - 2 \log (a-b) = \log 6 + \log a + \frac{1}{2} \log 2 +$

$+ \frac{1}{2} \log (a-b) + \frac{1}{2} \log c - \log 5 - 2 \log (a-b) = \log 6 + \log a +$

$+ \frac{1}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log (a-b) + \frac{1}{2} \log c - \log 5.$

ж) $x = \frac{\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a \sqrt[3]{a}}}$; $\log x = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{4} \log a + \frac{1}{8} \log a -$

$- \frac{1}{3} \log a - \frac{1}{9} \log a = \frac{31}{72} \log a.$

2. Потенцирование. Если по данному результату логарифмирования находят выражение, от которого получен этот результат, то такую операцию называют *потенцированием.*

Примеры. Пропотенцировать следующие выражения:

а) $\log x = 5 \log c - \frac{1}{3} \log d;$

б) $\lg x = \log b - \frac{1}{m} \log (b-c) + m \log (b+c);$

в) $\log x = -\log(a+b) + \frac{2}{5}\left[\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{3}(\log a - \log b)\right]$.

Решения.

а) $\log x = \log c^5 - \log \sqrt[3]{d} = \log \frac{c^5}{\sqrt[3]{d}}$; $x = \frac{c^5}{\sqrt[3]{d}}$.

б) $\log x = \log b + \log (b-c)^{-\frac{1}{m}} + \log (b+c)^m =$

$= \log [b\,(b-c)^{-\frac{1}{m}}\,(b+c)^m]$; $x = \frac{b\,(b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}}$.

в) $\log x = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\log a + \frac{5}{6}\log b\right) - \log(a+b) =$

$= \frac{4}{15}\log a + \frac{1}{3}\log b - \log(a+b) = \log \frac{a^{\frac{4}{15}} b^{\frac{1}{3}}}{a+b}$; $x = \frac{a^{\frac{4}{15}} b^{\frac{1}{3}}}{a+b}$.

§ 36. Десятичные логарифмы

1. Свойства десятичных логарифмов. а) *Логарифм целого числа, изображенного единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, содержащее столько единиц, сколько нулей в данном числе.*

Примеры. $\lg 100 = 2$; $\lg 10\,000 = 4$.

б) *Логарифм десятичной дроби, изображаемой единицей с предшествующими нулями, есть целое отрицательное число, содержащее столько отрицательных единиц, сколько нулей в изображении дроби, считая и 0 целых.*

Примеры. $\lg 0{,}00001 = -5$; $\lg 0{,}001 = -3$.

в) *Логарифм рационального числа, которое не является степенью 10 с целым показателем (положительным, отрицательным или нулевым), есть иррациональное число.*

Логарифм иррационального числа может быть как рациональным, так и иррациональным числом. Например, $\lg \sqrt[7]{100} = \frac{1}{7}\lg 100 = \frac{2}{7}$ (рациональное число), $\lg \sqrt{3} = \frac{1}{2}\lg 3$ (иррациональное число).

Целая часть логарифма называется его *характеристикой*, а дробная — *мантиссой*.

г) *Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр его целой части.*

Примеры. $\lg 3{,}15 = 0,\ldots$; $\lg 375 = 2,\ldots$; $\lg 2000 = 3,\ldots$

д) *Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей в этом числе предшествует первой значащей цифре*, считая и нуль целых. При этом мантисса логарифма положительна.

Примеры. $\lg 0{,}35 = \bar{1},\ldots$; $\lg 0{,}0054 = \bar{3},\ldots$.

е) *От умножения числа на* 10, 100, 1000, . . . , *вообще на единицу с последующими нулями, мантисса логарифма не меняется, а характеристика увеличивается на столько единиц, сколько нулей в множителе.*

От деления числа на единицу с нулями мантисса логарифма не изменяется, а характеристика уменьшается на столько единиц, сколько нулей в делителе.

Поэтому перенесение запятой в десятичной дроби на несколько знаков вправо или влево не изменяет мантиссы логарифма этой дроби, а только характеристику.

Таким образом, логарифмы чисел 0,00423; 0,0423; 4,23; 423 отличаются только характеристиками, но не мантиссами (при условии, что все мантиссы положительны). Мантиссы логарифмов чисел, имеющих одну и ту же значащую часть, одинаковы.

2. **Преобразование отрицательного логарифма.** Известно, что десятичные логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны. Такие логарифмы всегда можно преобразовать так, что мантисса у них будет положительная, а характеристика — отрицательной. Это выполняется по следующему правилу.

Чтобы преобразовать логарифм с отрицательной мантиссой в логарифм с положительной мантиссой, надо к характеристике прибавить минус единицу, а к мантиссе прибавить плюс единицу.

Так, например, если мы имеем логарифм — 2,3781, то можно его преобразовать так:

$$-2{,}3781 = -2 - 0{,}3781 = (-2 - 1) + (1 - 0{,}3781) = \\ = -3 + 0{,}6219 = \bar{3}{,}6219.$$

Кратко эти действия записывают так:

$$-2{,}3781 = \overset{-1+1}{-2{,}3781} = \bar{3}{,}6219.$$

Примеры.

$$-1{,}3720 = \overset{-1+1}{-1{,}3720} = \bar{2}{,}6280$$
$$-0{,}7421 = \overset{-1+1}{-0{,}7421} = \bar{1}{,}2479$$
$$-2{,}0374 = \overset{-1+1}{-2{,}0374} = \bar{3}{,}9626$$
$$-1{,}4570 = \overset{-1+1}{-1{,}4570} = \bar{2}{,}5430$$

3. Таблицы десятичных логарифмов. Существуют таблицы, в которых даются десятичные логарифмы всех чисел с точностью до трех, четырех, пяти и т. д. десятичных знаков. Соответственно этому их называют *трехзначными*, *четырехзначными*, *пятизначными* и т. д. Чаще всего пользуются четырехзначными таблицами десятичных логарифмов. Эти таблицы (см. стр. 31) содержат мантиссы логарифмов всех целых чисел от 1 до 9999 включительно, вычисленные с четырьмя десятичными знаками.

Этими таблицами пользуются так.

Пример 1. Найдем десятичный логарифм трехзначного числа 73,3. Его характеристика 1, так как в числе 73 две цифры. Чтобы найти мантиссу, отбрасываем запятую и ищем мантиссу числа 733. В столбце, обозначенном буквой N, находим число 73. Двигаясь по строке, в которой находится число 73, до пересечения ее со столбцом, обозначенным цифрой 3, находим 8651. Число 0,8651 и будет искомой мантиссой. Итак,

$$\lg 73{,}3 = 1{,}8651.$$

Пример 2. Найти логарифм числа 5. Его характеристика 0, так как число содержит одну цифру. Приписывая к 5 два нуля, получаем трехзначное число 500 и ищем, так же как и выше, его мантиссу 6990. Итак, $\lg 5 = 0{,}6990$.

Пример 3. Найти логарифм числа 5,1.

Его характеристика 0, так как в целой части одна цифра. Отбрасываем запятую и приписываем нуль, получаем 510 и ищем мантиссу: 7076. Итак, $\lg 5{,}1 = 0{,}7076$.

Пример 4. Найти логарифм числа 672,3. Характеристика его равна 2. Чтобы найти мантиссу, не принимаем во внимание запятую, отбрасываем крайнюю правую цифру 3 и ищем мантиссу логарифма числа 672. Она равна 0,8274. Затем находим в столбцах поправок (крайние правые столбцы с цифрами 1—9) в столбце, обозначенном цифрой 3, и в той же строке, что и число 67, поправку 2. Поэтому мантисса данного числа получится как сумма $0{,}8274 + 0{,}0002 = 0{,}8276$.

Записывают это так:

$$\begin{array}{r} \lg 672{,}0 = 2{,}8274 \\ +3 \qquad +2 \\ \hline \lg 672{,}3 = 2{,}8276 \end{array}$$

Пример 5. Найти логарифм числа 0,0057842. Характеристика его равна $\bar{3}$. Отбрасываем цифру 2 (причем последнюю цифру числа увеличиваем на 1 в том случае, когда отбрасываемая пятая цифра есть 5 или больше 5) и вместо 57842 берем 5784. Для логарифма округленного четырехзначного числа находим мантиссу так, как было объяснено. Получаем

$$\lg 0{,}0057842 = \bar{3}{,}7622.$$

4. Интерполирование. Поправку на четвертую цифру можно найти, не пользуясь столбцами поправок, так как в некоторых таблицах они вообще не даются. В этом случае поправки находят с помощью простых вычислений, основанных на следующем положении: если числа превосходят 100, а разности между ними меньше 1, то принимают, что разности между логарифмами пропорциональны разности между соответствующими числами. Для этого поступают так.

Если число, мантиссу логарифма которого нужно найти, есть 6723, то сначала находим мантиссу числа 672 (она равна 0,8274), а затем мантиссу числа 673 (она равна 0,8280), после этого находим разность мантисс (она равна 6 десятитысячным), тогда, на основании указанного положения, находим поправку с помощью пропорции:

$$x : 3 = 6 : 10, \quad x = \frac{3 \cdot 6}{10} \approx 2 \text{ (десятитысячным)}.$$

Этот способ нахождения промежуточного значения логарифма по двум рядом стоящим в таблице его значениям называется *интерполяцией, или интерполированием.*

5. Отыскание числа по логарифму. Для отыскания числа по данному логарифму можно пользоваться теми же таблицами, что и для отыскания логарифма по числу.

Пример 1. Найти число, логарифм которого равен 3,4683. Обращаемся к таблицам 8 (см. стр. 35), и в одном из столбцов под номерами 0—9 ищем число, первые две цифры которого составляют 46, а две последние 83 (или близкое к 83 число), находим в строке 29, в столбце 4. Значит, число, имеющее мантиссой 4683, есть 294. Так как характеристика 3 положительна, то в целой части числа выделяем $3 + 1 = 4$ цифры. Для этого в конце числа 294 приписываем нуль. Имеем $3{,}4683 = \lg 2940$.

Пример 2. Найти число x, логарифм которого равен $\bar{3}{,}3916$.

Так как среди мантисс нет числа 3916, то находим ближайшее к нему число 3909, стоящее на пересечении строки 24 и столбца 6. Этой мантиссе соответствует число 246; оно дает первые три значащие цифры искомого числа. Четвертую цифру находим, вычисляя поправку. Данная мантисса 3916 превосходит табличную 3909 на 7. Ищем эту цифру на той же строке 24 среди «поправок». Она стоит в столбце 4. Цифра 4 есть четвертая значащая цифра искомого числа; число, имеющее мантиссой 3916, есть 2464. Так как характеристика отрицательна и содержит три единицы, то перед найденным числом ставим три нуля и стоящий слева нуль отделяем запятой. Имеем: $\lg 0{,}002464 = \bar{3}{,}3916$.

$$x = 0{,}002464.$$

Примечание. Следует твердо помнить, что при отыскании числа по логарифму поправку этого числа приписывают к нему, а не прибавляют к его последней цифре.

Величину поправки нужно разыскивать в той же строке, где содержится число, близкое к мантиссе. Если в этой строке нет той поправки мантиссы, которая нужна, берем ближайшую поправку.

Однако отыскивать числа по известным десятичным логарифмам лучше в таблице *антилогарифмов* (стр. 34). Это та же таблица логарифмов, но с иным расположением материала, облегчающим разыскание числа по данному логарифму.

Пример 3. Найти число, логарифм которого равен 2,732. Отбрасываем характеристику и берем первые две цифры мантиссы (73). В строке 73 отыскиваем число, стоящее в столбце 2. Находим 5395. Так как характеристика логарифма равна 2, то искомое число 539,5.

Пример 4. Найти число, логарифм которого равен 1,3846. Отбрасываем характеристику и берем первые две цифры мантиссы (38). В строке 38 двигаемся до пересечения ее со столбцом, обозначенным цифрой 4 (третья цифра мантиссы), находим число 2421 и, двигаясь далее по этой строке до пересечения ее со столбцом поправок, обозначенным цифрой 6 (четвертая цифра мантиссы), находим число 3. Два найденных числа складываем: $2421 + 3 = 2424$. Так как характеристика логарифма равна 1, то искомое число 24,24.

Запись:
$$\begin{array}{rr} 384 & -2421 \\ 6- & 3 \\ \hline 3846 & 2424 \end{array}$$
$x = 24{,}24.$

6. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками. а) Сложение. При сложении логарифмов с отрицательными характеристиками сначала складывают их мантиссы, а затем характеристики.

Примеры.

$$\text{а)}\ \begin{array}{r} \bar{3},1628 \\ +\ \bar{1},2291 \\ \hline \bar{4},3919 \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{r} \bar{1},8456 \\ +\ \bar{2},5164 \\ \hline \bar{2},3620 \end{array}$$

б) Вычитание. При вычитании логарифмов с отрицательными характеристиками вычитают сначала мантиссу, а затем характеристику.

Примеры.

$$\text{а)}\ \begin{array}{r} -\ 2,1582 \\ \bar{1},3791 \\ \hline 2,7791 \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{r} -\ 0,3724 \\ 3,5492 \\ \hline \bar{4},8232 \end{array} \qquad \text{в)}\ \begin{array}{r} -\ \bar{3},3284 \\ 2,3437 \\ \hline \bar{6},9847 \end{array}$$

в) Умножение. Чтобы умножить логарифм с отрицательной характеристикой на положительное число, надо отдельно умножить на это число характеристику и отдельно положительную мантиссу. й

Примеры.

а) $\begin{array}{r} \times\ \overline{1},7428 \\ \hline 2 \\ \hline \overline{1},4856 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \times\ \overline{3},6735 \\ \hline 4 \\ \hline \overline{10},6940 \end{array}$

г) Деление. При делении рассматривают два случая.

Если характеристика кратна делителю, то надо отдельно делить характеристику и отдельно мантиссу.

Примеры. а) $\overline{4},0568 : \overline{2} = 2,0284$; б) $\overline{2},1314 : 2 = \overline{1},0657$.

Если характеристика не кратна делителю, то до характеристики прибавляют столько единиц, чтоб получить отрицательное число, кратное делителю, а к положительной мантиссе прибавляют столько же положительных единиц; после этого делят отрицательную характеристику и положительную мантиссу отдельно.

Пример. $\overline{3},6428 : 2 = (\overset{-1}{-3} \overset{+1}{+} 0,6428) : 2 = (-4 + 1,6428) : 2 = -2 + 0,8214 = \overline{2},8214$.

7. Логарифмические вычисления.

Пример 1. Вычислить

$$x = \frac{0,045 \cdot 7,513}{2,071 \cdot 0,864}.$$

Решение.

$$\lg x = \lg 0,045 + \lg 7,513 - \lg 2,071 - \lg 0,864.$$

$$\begin{array}{rr} & \lg 0,045 = \overline{2},6532 \\ & \lg 7,513 = 0,8758 \\ & \overset{-1+1}{} \\ -\lg 2,071 = & -0,3162 = \overline{1},6838 \\ & \overset{-1+1}{} \\ -\lg 0,864 = & -\overline{1},9365 = 0,0635 \\ \hline & \lg x = \overline{1},2753 \\ & x = 0,1885. \end{array}$$

Пример 2. Вычислить

$$x = \frac{8,367 \cdot \sqrt{0,6725}}{0,9658^2 \cdot \sqrt[3]{0,3575}}.$$

Решение.

$$\lg x = \lg 8{,}367 + \frac{1}{2}\lg 0{,}6725 - 2\lg 0{,}9658 - \frac{1}{3}\lg 0{,}3575$$

$$\lg 8{,}367 = 0{,}9226 \qquad = 0{,}9226$$

$$\frac{1}{2}\lg 0{,}6725 = \frac{1}{2}\cdot \overset{-1+1}{\bar{1}},8277 = \bar{1},9139 \qquad = \bar{1},9139$$

$$-2\lg 0{,}9658 = -2\cdot \bar{1},9849 = \overset{-1+1}{-\bar{1}},9698 = 0{,}0302$$

$$-\frac{1}{3}\lg 0{,}3575 = -\frac{1}{3}\cdot \overset{-2+2}{\bar{1}},5533 = -\bar{1},8511 = 0{,}1489$$

$$\lg x = 1{,}0156$$

$$x = 10{,}36.$$

Пример 3. Вычислить с помощью логарифмических таблиц

$$x = 3{,}525\sqrt{15{,}07^2 - \sqrt{\frac{258{,}4}{0{,}07288}}}.$$

Решение. Непосредственным логарифмированием нельзя вычислить x, так как выражение под радикалом есть разность двух чисел

$$15{,}07^2 - \sqrt{\frac{258{,}4}{0{,}07288}}.$$

Поэтому сначала определим разность, для чего вычислим отдельно уменьшаемое и вычитаемое.

Пусть $15{,}07^2 = y$;

$$\sqrt{\frac{258{,}4}{0{,}07288}} = z.$$

1) $\lg y = 2\lg 15{,}07 = 2\cdot 1{,}1781 = 2{,}3562$; $y = 227{,}1$.

2) $\lg z = \frac{1}{2}(\lg 258{,}4 - \lg 0{,}07288) = \frac{1}{2}(2{,}4123 - \bar{2},8626) =$

$= \frac{1}{2}\cdot 3{,}5497 = 1{,}7749$; $z = 59{,}55$.

3) $y - z = 227{,}1 - 59{,}55 = 167{,}55$.

4) $x = 3{,}525\sqrt{167{,}55}$.

$$\lg x = \lg 3{,}525 + \frac{1}{2}\lg 167{,}55 = 0{,}5471 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}2243 = 1{,}6593.$$

Ответ. $x = 45{,}63$.

§ 37. Показательные и логарифмические уравнения

1. Показательные уравнения. *Показательными* уравнениями называют такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени. Общего метода решения показательных уравнений нет. Однако можно указать несколько групп уравнений, которые могут быть решены методами элементарной математики.

Решение показательных уравнений основано на следующих теоремах.

1) Если основания двух степеней равны и степени равны, причем основания $a > 0$ и $a \neq 1$, то показатели степеней также равны, т. е. если $a^m = a^n$, то $m = n$.

2. Если у равных степеней равны и отличны от нуля показатели степени, то равны и основания степеней, т. е. если $a^m = b^m$, $m \neq 0$, то $a = b$ (имеются в виду положительные a и b).

Теперь рассмотрим основные типы показательных уравнений.

а) Простейшие показательные уравнения. *Простейшим показательным уравнением* называется уравнение вида $a^x = b$, где a — отличное от 1 положительное число. При $b \leqslant 0$ уравнение решений не имеет, так как при действительных значениях x степень a^x не может быть отрицательным числом или быть равным нулю. При $b > 0$ это уравнение имеет единственное решение.

Пример. Решить уравнение $25^x = \frac{1}{5}$.

Решение. Первый способ:

$$(5^2)^x = 5^{-1}, \quad 5^{2x} = 5^{-1}, \quad 2x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Второй способ:

$$x \lg 25 = -\lg 5; \quad 2x \lg 5 = -\lg 5, \quad 2x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

б) Показательные уравнения вида

$$a^{\varphi(x)} = b,$$

где a — отличное от 1 положительное число, а $\varphi(x)$ — элементарная алгебраическая функция.

Введением нового неизвестного $u = \varphi(x)$ это уравнение приводится к простейшему показательному уравнению $a^u = b$.

Пример. Решить уравнение $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

Решение. Первый способ:

$$2^{x^2-6x-2,5} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}; \quad 2^{x^2-6x-2,5} = 2^{\frac{9}{2}}.$$

Откуда

$$x^2 - 6x - 2{,}5 = 4{,}5, \text{ или } x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Тогда

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -1.$$

Второй способ.

$$(x^2 - 6x - 2{,}5)\lg 2 = \lg 16\sqrt{2}; \quad (x^2 - 6x - 2{,}5)\lg 2 = 4{,}5\lg 2.$$

Отсюда

$$x^2 - 6x - 2{,}5 = 4{,}5, \text{ или } x^2 - 6x - 7 = 0$$

и т. д.

в) Показательные уравнения вида

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)},$$

где a и b — отличные от 1 положительные числа, а $f(x)$ и $\varphi(x)$ — элементарные алгебраические функции.

Это уравнение приводится к равносильному уравнению

$$f(x)\log_c a = \varphi(x)\log_c b.$$

Если a и b — степени какого-нибудь числа c, т. е. $a = c^p$, $b = c^q$, то уравнение можно записать так:

$$c^{pf(x)} = c^{q\varphi(x)}$$

и его решение приводится к решению равносильного ему уравнения:

$$pf(x) = q\varphi(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $4^{\frac{x-1}{2}} = 8^{x^2-1}$.

Решение. Запишем уравнение так:

$$2^{2\cdot\frac{x-1}{2}} = 2^{3(x^2-1)}.$$

Отсюда

$$\frac{2(x-1)}{2} = 3(x^2-1), \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Решение. Запишем уравнение так:

$$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$2^{2x-1}(2+1)=3^{x-\frac{1}{2}}(3+1),\quad 2^{2x-1}\cdot 3=3^{x-\frac{1}{2}}\cdot 4;$$

$$\frac{2^{2x-1}}{4}=\frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3},\quad 2^{2x-3}=3^{\frac{2x-3}{2}}.$$

Прологарифмировав, получим

$$(2x-3)\lg 2=\frac{2x-3}{2}\lg 3.$$

Тогда

$$(2x-3)\left(\lg 2-\frac{1}{2}\lg 3\right)=0,$$

значит

$$2x-3=0,\quad x=\frac{3}{2}.$$

г) Показательные уравнения вида

$$F[\varphi(x)]=0,$$

где $\varphi(x)$ — некоторая показательная функция, а F — элементарная алгебраическая функция. Полагая $\varphi(x)=u$, получаем уравнение $F(u)=0$. Если $t_1, t_2, \ldots, t_s$ — действительные решения последнего, то решение уравнения $F[\varphi(x)]=0$ приводится к решению уравнений

$$\varphi(x)=t_i\quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Пример. Решить уравнение

$$3^{x+3}-\frac{2}{3^{x+3}}-1=0.$$

Решение. Так как $3^{x+3}=3^3\cdot 3^x$ и $3^{x+3}=3^2\cdot 3^x$, то уравнение запишем так:

$$3^3\cdot 3^x-\frac{2}{3^x\cdot 3^2}-1=0.$$

Умножив обе части уравнения на $3^2\cdot 3^x$, получим:

$$3^5\cdot 3^{2x}-3^2\cdot 3^x-2=0.$$

Полагая $3^x=t$, получаем квадратное уравнение $3^5t^2-3^2t-2=0$. Отсюда $t_1=-\frac{2}{27}$, $t_2=\frac{1}{9}$.

Уравнение $3^x = -\frac{2}{27}$ решений не имеет; уравнение $3^x = \frac{1}{9}$ имеет решение $x = -2$. Следовательно, данное уравнение имеет решение $x = -2$ *.

2. **Логарифмические уравнения.** *Логарифмическими уравнениями* называют такие уравнения, в которых неизвестное входит под знак логарифма.

При решении логарифмических уравнений часто приходится логарифмировать и потенцировать обе части уравнения. То же бывает и при решении показательных уравнений. Указанные операции могут привести к уравнениям, не равносильным данным.

Так, если A и B являются выражениями, содержащими неизвестные, то следующие уравнения, вообще говоря, будут неравносильны:

а) $A = B$ и $\lg A = \lg B$;

б) $\lg(AB) = \lg C$ и $\lg A + \lg B = \lg C$;

в) $\lg \frac{A}{B} = \lg C$ и $\lg A - \lg B = \lg C$;

г) $\lg A^n = C$ и $n \lg A = C$.

Для логарифмических уравнений, так же как и для показательных, общего метода решения нет. Однако среди логарифмических уравнений можно выделить несколько групп уравнений, решаемых элементарными методами. Приступая к решению уравнения, необходимо установить область допустимых значений для неизвестного.

Простейшими логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a x = b,$$

где a — отличное от 1 положительное число. При всяком действительном b уравнение имеет единственное решение: $x = a^b$.

Пример. Решить уравнение $\lg x = 2 - \lg 5$.

Решение. $x > 0$,

$$\lg x = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20; \quad x = 20.$$

а) Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a f(x) = b,$$

где a — отличное от 1 положительное число, а $f(x)$ — элементарная алгебраическая функция.

Введением неизвестного $t = f(x)$ уравнение приводится к простейшему логарифмическому уравнению $\log_a t = b$.

* Еще лучше было бы заменить: $3^{x+2} = y$.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3(x^2-7x+21)=2$.

Решение. Область допустимых значений для x — вся числовая ось, так как $x^2-7x+21>0$ при любом x (дискриминант $D<0$). По определению логарифма

$$x^2-7x+21=3^2,\quad x_1=3,\quad x_2=4.$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x-1}(x^2-5x+2{,}25)=2$.

Решение. Область допустимых значений неизвестного определяется из условий:

$$x-1>0,\quad x-1\neq 1;$$

$$x^2-5x+2{,}25>0.$$

Следовательно, $x>4{,}5$.

Решение данного уравнения приводится к решению уравнения

$$x^2-5x+2{,}25=(x-1)^2,$$

или

$$-3x=-1{,}25,\quad x=\frac{5}{12}.$$

$x=\frac{5}{12}$ не входит в область допустимых значений.

Уравнение не имеет действительных корней.

б) Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a f(x)=\log_a \varphi(x),$$

где a — отличное от 1 положительное число, $f(x)$ и $\varphi(x)$ — элементарные алгебраические функции. Данное уравнение приводится к решению уравнения $f(x)=\varphi(x)$. Поэтому для решения уравнения $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ достаточно найти все решения уравнения $f(x)=\varphi(x)$ и среди них выбрать те, которые относятся к области допустимых значений уравнения $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$. Если же уравнение $f(x)=\varphi(x)$ решений не имеет, то их не имеет и уравнение

$$\log_a f(x)=\log_a \varphi(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $5\lg x=3\lg\frac{x}{2}$.

Решение. Область допустимых значений $x>0$.

$$\lg x^5=\lg\left(\frac{x}{2}\right)^3,$$

тогда

$$x^5=\left(\frac{x}{2}\right)^3.$$

Решая уравнение $x^5 = \left(\frac{x}{2}\right)^3$, получаем $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_5 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. К области допустимых значений уравнения относится только x_5. Следовательно, данное уравнение имеет одно решение $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $\lg(2x) = 2\lg(4x - 15)$.

Решение. Для $\lg(2x)$ область допустимых значений неизвестного $x > 0$; для $\lg(4x - 15)$ имеем $4x - 15 > 0$, или $x > \frac{15}{4}$. Следовательно, область допустимых значений неизвестного уравнения будет $x > 3\frac{3}{4}$. Преобразуем данное уравнение:

$$\lg(2x) = \lg(4x - 15)^2; \quad 2x = (4x - 15)^2, \quad 16x^2 - 122x + 225 = 0.$$

Значит, $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{8}$. Так как x_2 не принадлежит области допустимых значений уравнения, а x_1 удовлетворяет уравнению, то уравнение имеет единственный корень:

$$x = \frac{9}{2}.$$

в) Логарифмические уравнения вида

$$\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \ldots + \log_a f_s(x) = \\ = \log_a \varphi_1(x) + \log_a \varphi_2(x) + \ldots + \log_a \varphi_m(x),$$

где a — отличное от 1 положительное число, а $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — алгебраические функции; при этом некоторые из них могут быть постоянными числами.

Уравнения такого вида приводятся к уравнению вида

$$f_1(x) f_2(x) \ldots f_s(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x).$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\lg(3x - 11) + \lg(x - 27) = 3.$$

Решение. Найдем сначала область допустимых значений для x:

$$3x - 11 > 0, \quad x > 3\frac{2}{3};$$

$$x - 27 > 0. \quad x > 27.$$

Общая область допустимых значений будет $x > 27$.

Заменив $3 = \lg 1000$, уравнение перепишем так: $\lg[(3x - 11)(x - 27)] = \lg 1000$, отсюда $(3x - 11)(x - 27) = 1000$, или $3x^2 - 92x - 703 = 0$, $x_1 = 37$, $x_2 = -\frac{19}{3}$. Так как $x_2 = -\frac{19}{3}$ не принадлежит области допустимых значений, то уравнение имеет единственный корень $x = 37$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg(2x) + \lg(x + 3) = \lg 2 + \lg(6x - 2).$$

Решение. Область допустимых значений для

$$\lg(2x) : 2x > 0, \quad x > 0;$$
$$\lg(x + 3) : x + 3 > 0, \quad x > -3;$$
$$\lg(6x - 2) : 6x - 2 > 0, \quad x > \frac{1}{3}.$$

Общая область допустимых значений будет $x > \frac{1}{3}$.

Уравнение принимает вид $x(x + 3) = 6x - 2$, или $x^2 - 3x + 2 = 0$, отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Оба эти значения принадлежат области определения и оба они являются решениями данного уравнения.

г) Логарифмические уравнения вида

$$F[g(x)] = 0,$$

где $g(x)$ — логарифмическая функция, а F — элементарная алгебраическая. Для решения уравнения вводят переменную $t = g(x)$. Тогда данное уравнение приводится к уравнению $F(t) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $(\lg x - 5)\lg x^3 + 18 = 0$.

Решение. Область допустимых значений $x > 0$. Так как $\lg x^3 = 3\lg x$, то данное уравнение равносильно уравнению $(\lg x - 5)\,3\lg x + 18 = 0$.

Полагая $\lg x = t$, получим:

$$3t(t - 5) + 18 = 0, \quad t^2 - 5t + 6 = 0, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 3.$$

Решив уравнения $\lg x = 2$ и $\lg x = 3$, получим решения данного уравнения $x_1 = 100$ и $x_2 = 1000$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0.$$

Решение. Область допустимых значений $x > 0$. Положим $\log_2 x = z$, откуда

$$z^2 - z - 2 = 0, \quad z_1 = +2, \quad z_2 = -1,$$

следовательно,

$$\log_2 x = 2, \quad x_1 = 4; \quad \log_2 x = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$.
Решение. Перепишем уравнение так:

$$\log_5 (\log_4 \log_3 x) = 0.$$

Тогда число, стоящее в скобках, по определению логарифма, равно 5^0, т. е. 1:

$$\log_4 \log_3 x = 1.$$

Записывая это уравнение так: $\log_4 (\log_3 x) = 1$, получаем $\log_3 x = 4$, откуда $x = 3^4 = 81$.

11. **Показательно-логарифмические уравнения.** Так называют уравнения, в которых неизвестное входит и под знак логарифма и в показатель степени.

Обычно показательно-логарифмические уравнения решают логарифмированием обеих частей уравнения, после чего получают логарифмическое уравнение или преобразовывают уравнения так, чтобы получились степени с одинаковым основанием.

Рассмотрим несколько примеров таких уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $x^{3-\lg\frac{x}{3}} = 900$.
Решение. Логарифмируя обе части уравнения, получаем:

$$(3 - \lg x + \lg 3) \lg x = 2 \lg 3 + 2,$$
$$\lg^2 x - (3 + \lg 3) \lg x + 2 \lg 3 + 2 = 0.$$
$$\lg x = \frac{3 + \lg 3 \pm \sqrt{(1 - \lg 3)^2}}{2};$$
$$\lg x_1 = 2, \quad x_1 = 100; \quad \lg x_2 = \lg 30, \quad x_2 = 30.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$5^{\lg x} + 5^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} + 3^{\lg x - 1}.$$

Решение.

$$5^{\lg x}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3^{\lg x}\left(3 + \frac{1}{3}\right);$$
$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \frac{25}{9}; \quad \lg x = 2; \quad x = 100.$$

12. Системы показательных и логарифмических уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = 3\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение. Потенцируя первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = \frac{10}{3}, \end{cases}$$

решив которую, получим

$$x_1 = 3, \quad y_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = 3.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$$

Решение. Считаем, что основания логарифмов a и b и неизвестные величины x и y положительны. Потенцируя, получаем

$$xy = a^2, \quad \frac{x}{y} = b^4.$$

Эта система имеет два решения:

$$x_1 = ab^2, \quad y_1 = \frac{a}{b^2}; \quad x_2 = -ab^2, \quad y_2 = -\frac{a}{b^2}.$$

Но второе решение не годится, так как при положительных значениях a и b, значения x и y отрицательные. Следовательно, данная система имеет единственное решение:

$$x = ab^2, \quad y = \frac{a}{b^2}.$$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2. \end{cases}$$

Решение. Так как $2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2^9$, то получаем $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$. С другой стороны, $\lg \sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 2$, $\lg \sqrt{xy} = \lg 20$, т. е. $\sqrt{xy} = 20$. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 20, \end{cases}$$

решив которую, получим:

$$x_1 = 16, \quad y_1 = 25; \quad x_2 = 25, \quad y_2 = 16.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как $729 = 9^3$ и $3^0 = 1$, получим $9^{x+y} = 9^3$ и $3^{x-y-1} = 3^0$,

откуда имеем:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет решение: $x = 2$, $y = 1$, являющееся также решением данной системы.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 14^x - 63y = 0, \\ 17^x - 87y = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\frac{14^x}{63} = y, \quad \frac{17^x}{87} = y.$$

Тогда

$$\frac{14^x}{63} = \frac{17^x}{87}, \quad \left(\frac{14}{17}\right)^x = \frac{63}{87}, \quad x \lg \frac{14}{17} = \lg \frac{63}{87}, \quad x = \frac{\lg \frac{63}{87}}{\lg \frac{14}{17}} \approx 1{,}66.$$

Из уравнения $14^x = 63y$ находим y:

$$y \approx \frac{1}{63} \cdot 14^{1{,}66} \approx 1{,}28.$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 12, \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1. \end{cases}$$

Решение. Полагая $2^{\frac{x-y}{4}} = z$, первое уравнение будет $z^2 - z - 12 = 0$. Тогда $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$, $z_1 = 4$, $z_2 = -3$. Второе значение отбрасываем и получаем $2^{\frac{x-y}{4}} = 4$. С другой стороны, так как $3^{\lg(2y-x)} = 1$, то $\lg(2y - x) = 0$, $2y - x = 1$. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{4}} = 4, \\ 2y - x = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x = 17$, $y = 9$, которое будет также решением данной системы.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x \log_2 \log_y y = 0, \\ \log_y 9 = 1. \end{cases}$$

Решение. Со второго уравнения находим $y = 9$. Тогда

$$\log_x (\log_2 \log_x 9) = 0 \text{ и } \log_2 \log_x 9 = 1.$$

Отсюда $\log_x 9 = 2$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Отбрасывая $x = -3$, получаем $x = 3$.

Ответ. $x = 3$, $y = 9$.

§ 38. Логарифмическая линейка

1. Назначение и описание логарифмической линейки. Логарифмическая линейка является одним из простейших счетных приборов. При помощи логарифмической линейки можно выполнять действия умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня и некоторые более сложные математические операции. Линейка дает приближенные результаты: она позволяет находить лишь первые три-четыре значащие цифры, которые вполне достаточны для расчетов, чаще всего встречающихся в практике (особенно при вычислениях с приближенными данными).

Логарифмическая линейка (рис. 63, см. между стр. 352—353) состоит из:

1) *корпуса* с продольным пазом; 2) *движка*, свободно перемещающегося в продольном пазу корпуса линейки; 3) *бегунка* (или ползунка), представляющего собой металлическую рамку со стеклом, на котором имеется *визирная* линия, или *индекс*.

На лицевой стороне корпуса имеется 7 шкал:

1) шкала (сверху), обозначенная буквой K, дает кубы чисел шкалы D; 2) A и B дают квадраты чисел шкал D и C; 3) шкала

обратных чисел; 4) шкалы, обозначенные буквами C и D, — основные; 5) равномерная шкала (на нижнем краю корпуса), обозначенная буквой L и поделенная на полумиллиметры, дает мантиссы логарифмов чисел шкалы D.

На обратной стороне движка имеется три шкалы для вычисления тригонометрических величин. На обратной стороне корпуса линейки помещены некоторые справочные сведения, а по боковым граням — деления на сантиметры и миллиметры.

2. **Логарифмическая шкала.** Рассмотрим основную шкалу логарифмической линейки.

Выпишем из таблицы логарифмов значения логарифмов первых десяти натуральных чисел, взяв их с точностью до 0,01. Тогда получим такую таблицу:

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Логарифм	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Отложим на отрезке (рис. 64) длины, соответствующие логарифмам, и концы полученных отрезков обозначим числами 1, 2, 3 и т. д. Начало данного отрезка $\lg 1$ обозначим меткой 1, $\lg 2$ — меткой 2 и т. д. (конец), $\lg 10$ — меткой 10.

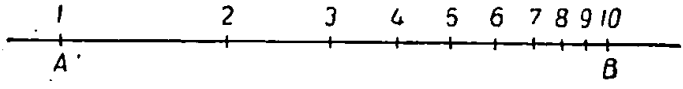


Рис. 64.

Используя таблицу логарифмов, на этой же шкале можно нанести более мелкие деления, а именно: 1,1; 1,2; 1,3, . . . Эта шкала в упрощенном виде представляет собой одну из основных шкал, нанесенных на логарифмической линейке.

Логарифмическую шкалу для значений от 10 до 100 (рис. 65) получим, если продлим шкалу за пределы первого участка (от 1 до 10) и повторим деления, нанесенные на первом отрезке, увеличив все числа меток в 10 раз. Точно так же можно продлить шкалу до 1000 и так далее, причем не только вправо, но и влево, так как логарифмическая шкала периодическая. Таким образом, имея логарифмическую шкалу длиной в одну масштабную единицу, можно

получить бесконечную логарифмическую шкалу простым ее повторением.

Обозначив *масштаб*, или *модуль шкалы*, буквой m, найдем, что расстояние от начала логарифмической шкалы до метки a в миллиметрах равно $m \lg a$. Взяв модуль шкалы 250 *мм* (линейки такой длины очень распространены, их называют *нормальными*), получим логарифмическую шкалу для чисел от 1 до 10 шкалы A. Продолжив ее для чисел 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, получим логарифмическую шкалу A нашей линейки. Пара тождественных логарифмических шкал A и B представляет собой математический прибор, который позволяет просто выполнять умножение и деление. Обычная

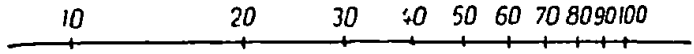


Рис. 65.

счетная линейка отличается от него наличием других шкал, которые позволяют выполнять не только умножение и деление, но и многие другие операции. Свойством периодичности обладают и другие шкалы счетной линейки. На шкале K имеем три (слева направо) подшкалы: метки первой идут от 1 до 10, второй от 10 до 100 и третьей от 100 до 1000.

3. Цена делений, чтение и установка меток. Чтобы пользоваться логарифмической линейкой для вычислений, надо прежде всего знать цену делений разных ее шкал, т. е. разности чисел, выражающих метки соседних штрихов шкал.

На шкалах C и D самое маленькое деление от 1 до 2 означает 0,01, от 2 до 4 — 0,02, от 4 до 10 — уже 0,05.

На шкалах A и B цена деления от 1 до 2 равна 0,02, от 2 до 5 — 0,05, от 5 до 10 — 0,1, от 10 до 20 — 0,2, от 20 до 50 — 0,5, от 50 до 100 — 1.

Шкала K имеет деления от 1 до 2 ценой 0,02, от 2 до 5 — 0,05, от 5 до 10 — 0,1, от 10 до 20 — 0,2, от 20 до 50 — 0,5, от 50 до 100—1, от 100 до 200 — 2, от 200 до 500 — 5, от 500 до 1000 — 10.

Шкала L — равномерная, цена ее деления 0,002, метки, обозначенные цифрами, читаются как десятые.

Каждая цифра на шкале обозначает не одно число, а все числа, которые можно получить умножением этого числа на какую-либо степень 10. Так метка, что обозначает число 1234, одновременно обозначает и числа: 123,4; 12,34; 0,1234. Поэтому числа на шкале устанавливают, не обращая внимания на запятую и нули в конце числа. Читают число, называя по порядку его цифры: 1—2—3—4.

Для того чтобы точно прочесть число, надо знать его место на шкале и его *порядок*. Для чисел, больших 1, порядок числа равен числу его цифр до запятой. Так, порядок числа 32,5 будет 2, порядок числа 1,12 равен 1. Для чисел, меньших 1, порядок числа есть число нулей после запятой до первой значащей цифры, это число берут со знаком минус. Так, порядок числа 0,038 равен (—1), порядок числа 0,358 равен 0, порядок числа 0,000017 равен (—4).

Для получения навыка чтения чисел на линейке надо выполнить такие упражнения.

Найти на шкале метку, соответствующую числам: три — четыре — один, два — нуль — два и т. д.

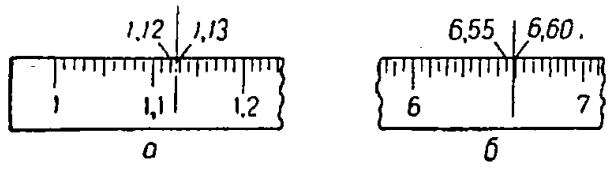


Рис. 66.

После того как приобретен навык правильного и быстрого чтения меток, обозначенных на шкалах линейки цифрами или штрихами без цифр, необходимо научиться читать и устанавливать метки, ничем на шкалах не обозначенные, т. е. выполнять «интерполяцию на глаз».

Так, например, пусть требуется прочитать метку, установленную индексом (рис. 66,*а*). Индекс здесь находится между метками 1,12 и 1,13 на шкале *C*; цена деления 0,01. Между меткой 1,12 и индексом чуть больший промежуток, чем между индексом и меткой 1,13. Оценивая их как 0,6 и 0,4 всего деления, видим, что к ближайшей левой метке надо прибавить еще $0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}006$. Таким образом, метка индекса здесь $1{,}12 + 0{,}006 = 1{,}126$.

На рис. 66,*б* индекс находится между метками 6,55 и 6,60. Принимая промежуток между меткой 6,55 и индексом, равным 0,8 всего деления, цена которого 0,05, получаем метку индекса, равную $6{,}55 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 6{,}55 + 0{,}04 = 6{,}59$.

§ 39. Вычисления на логарифмической линейке

1. Умножение. При умножении на логарифмической линейке иногда движок перемещают влево, а иногда — вправо.

Пример 1. Пусть надо умножить 3 на 2. Ставим индекс на цифру 3 шкалы *D*, под индекс ползунком подводим единицу — начало шкалы *C*; затем переводим индекс на цифру 2 шкалы *C* и под ним на шкале *D* читаем полученное произведение: 6.

Пример 2. Пусть надо умножить 9 на 5. Ставим индекс на цифру 9 шкалы D. Под индекс подводим начало шкалы C; так как цифра 5 шкалы C выходит за пределы шкалы D, то под индекс подводим конец шкалы C; затем переводим индекс на цифру 5 шкалы C и под ним на шкале D читаем результат 45.

Для определения места запятой в результате пользуются разными способами.

Первый способ. Способ *прикидки* с помощью грубого округления.

Пример. При умножении $0{,}0267 \cdot 32$ на линейке читаем: 8—7—3. Грубый подсчет дает: $0{,}03 \cdot 30 = 0{,}9$. Поэтому ответ будет 0,873.

Второй способ. Порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, если ползунок выдвинут влево, и на единицу меньший суммы порядков сомножителей, если ползунок выдвинут вправо.

Для лучшего запоминания этого правила используют запись на линейке справа $P - 1$ (если ползунок выдвинут вправо, то $P = P_1 + P_2 - 1$, где P — порядок произведения, P_1 и P_2, соответственно, порядки сомножителей).

Пример 1. Умножить $4{,}3 \cdot 3{,}4$. На линейке читаем 1—4—6—2. Порядок первого сомножителя 1, порядок второго 1; ползунок выдвинут влево. Порядок произведения равен $1 + 1 = 2$.

Ответ. 14,62.

Пример 2. Умножить $0{,}026 \cdot 32$. На шкале читаем 8—3—2; порядок первого сомножителя равен —1, порядок второго сомножителя 2. Ползунок выдвинут вправо. Порядок произведения равен: $-1 + 2 - 1 = 0$.

Ответ. 0,832.

Если надо перемножить 3; 4; 5 и т. д. чисел, сначала находят произведение первых двух, затем, не читая это произведение, умножают его на третье данное число, далее, не читая его, умножают на четвертое данное число и т. д. Эти операции продолжают, пока не исчерпают все сомножители. Положение запятой в результате дает прикидка.

Пример 3. Умножить $23{,}4 \cdot 0{,}765 \cdot 388$. На шкале читаем 6—9—5; делаем прикидку $20 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 6400$ и тогда окончательное произведение будет 6950.

2. **Деление.** Это действие выполняется так.

На линейке против делимого, взятого на шкале D, устанавливают делитель, который берут на шкале C; против левого (или правого) конца шкалы C читаем на шкале D результат.

При делении можно получить результат как под правым, так и под левым концом шкалы движка.

Запятая в результате определяется прикидкой или по формуле $Q = Q_1 - Q_2$, если ползунок выдвинут влево, или по формуле $Q = Q_1 - Q_2 + 1$, если ползунок выдвинут вправо. Здесь Q_1 — порядок делимого, Q_2 — порядок делителя, Q — порядок результата.

Для лучшего запоминания формул на линейке слева имеется запись $Q+1$.

Пример. Вычислить $\frac{0{,}00274}{0{,}873}$. На линейке читаем: 3—1—4. Порядок делимого равен — 2, порядок делителя равен 0. Ползунок выдвинут влево. Поэтому порядок результата равен $-2-0=-2$. Значит произведение равно 0,00314.

Примечание. Умножение и деление можно выполнять как на нижних шкалах C и D, так и на верхних шкалах A и B.

3. Совместное умножение и деление. Если приходится вычислять значение выражения вида $x = ab : c$, то удобнее сначала делить a на c и результат умножить на b, т. е.

$$(a : c) \cdot b.$$

Пример. Если $x = 84 \cdot 5{,}3 : 6{,}45$, то, поставив против метки 8—4—0 шкалы A метку 6—4—5 шкалы B, наводим индекс на метку 5—3—0 шкалы B и читаем метку 6—9—0 шкалы A. Прикидка $80 \cdot 5 : 6 = 70$ показывает, что надо взять $x = 69{,}0$.

Аналогично этому вычисляют выражения более сложного вида:

$$x = \frac{abcd}{efg}.$$

4. Возведение в квадрат и извлечение корня. Переход от основной шкалы к шкале квадратов равносильный возведению числа в квадрат. Обратный переход равнозначный извлечению квадратного корня.

Чтобы возвести в квадрат число, надо найти его метку на шкале D и прочитать противостоящую метку на шкале A.

Для извлечения квадратного корня из числа надо найти его метку на шкале A и прочитать противостоящую метку на шкале D.

Порядок результата при возведении в квадрат определяется в зависимости от того, на какой половине квадратной шкалы находится результат:

а) если на левой, то порядок результата равен удвоенному порядку основания минус единица;

б) если на правой, то порядок результата равен удвоенному порядку числа, которое возводят в квадрат.

Пример 1. $0{,}0308^2 = 0{,}000949$. Здесь порядок основания равен —1. Так как результат находится на левой подшкале, то его порядок равен $2(-1)-1=-3$.

Пример 2. $417^2 = 174\,000$. Здесь порядок основания равен 3. Так как результат находится на правой подшкале, то его порядок равен $2 \cdot 3 = 6$.

Если порядок числа, стоящего под корнем, четное число или нуль, то это число ставят на правой подшкале квадратов, а если нечетное — на левой.

Порядок квадратного корня равен числу всех его граней слева от запятой (включая и неполные), если подкоренное число не меньше 1, и числу чисто нулевых граней, справа от запятой, если оно меньше 1, взятому со знаком минус (при этом «нуль целых» за грань не считается).

Пример 1. $\sqrt{0{,}000000534} = 0{,}000731$. Здесь порядок подкоренного числа равен —6. Устанавливаем подкоренное число на правой подшкале.

Подкоренное число меньше единицы и число его чисто нулевых граней равно 3; значит порядок корня будет —3.

Пример 2. $\sqrt{0{,}00074} = 0{,}0272$. Здесь порядок подкоренного числа —3. Ставим его на левой подшкале. Так как подкоренное число меньше единицы, а число чисто нулевых граней равно 1, то порядок результата будет равен —1.

Пример 3. $\sqrt{176{,}2} = 13{,}28$. Здесь порядок подкоренного числа 3. Ставим его на левой подшкале. Так как число больше 1 и число его граней слева от запятой равно 2, то и порядок результата также равен 2.

5. Возведение в куб и извлечение кубического корня. Переход от основной шкалы к шкале кубов равнозначный возведению числа в куб. Обратный переход равнозначный извлечению кубического корня.

Чтобы данное число возвести в куб, надо найти метку на шкале D и прочесть противостоящую метку на шкале K.

Шкала кубов разбита на три одинаковые подшкалы (левая, средняя и правая).

Порядок третьей степени какого-либо числа (P) определяется по формулам (p — порядок основания):

1) $P = 3p$ — когда результат читаем на правой подшкале кубов;

2) $P = 3p - 1$ — когда результат читаем на средней подшкале кубов;

3) $P = 3p - 2$ — когда результат читаем на левой подшкале кубов.

Примеры. а) $20^3 = 8000$. Результат читаем на левой подшкале, следовательно, порядок его равен $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

б) $0{,}315^3 = 0{,}0313$. Результат читаем на средней подшкале, следовательно, его порядок равен $0 \cdot 3 - 1 = -1$.

Чтобы извлечь кубический корень из числа, надо найти его метку на шкале K и прочитать противостоящую метку на шкале D.

Чтобы поставить подкоренное число на линейке, разбиваем его мысленно на грани по три цифры так, чтобы запятая находилась между гранями. Если последняя справа грань окажется неполной, к ней нужно приписать один или два нуля, чтобы она стала полной. Неполной может оказаться и первая слева грань. В соответствии

с тем, имеет ли первая грань одну, две или три цифры, подкоренное число ставят на левую, среднюю или правую подшкалу кубов.

Порядок корня третьей степени определяется по формулам:

1) $P = \frac{p+2}{3}$ — когда индекс на левой подшкале K;

2) $P = \frac{p+1}{3}$ — когда индекс на средней подшкале K;

3) $P = \frac{p}{3}$ — когда индекс на правой подшкале K.

Примеры. а) $\sqrt[3]{8000} = 20$. Первая слева грань подкоренного числа имеет одну цифру, следовательно, это число ставим на левую подшкалу. Порядок результата равен $\frac{4+2}{3} = 2$.

б) $\sqrt[3]{0{,}000025} = 0{,}0292$. Первая слева грань (грань, состоящую из одних нулей, не принимаем во внимание) имеет две цифры, следовательно, подкоренное число ставим на средней подшкале кубов. Порядок результата равен $\frac{-4+1}{3} = -1$.

§ 40. Исторические сведения о логарифмах и логарифмической линейке

Логарифмы были изобретены в первой четверти XVII в. Они явились ответом на настоятельную потребность астрономов, которым приходилось иметь дело с большим количеством очень трудоемких вычислений. Поэтому изобретение это было сделано почти одновременно разными лицами и усовершенствовано в течение очень короткого времени. По меткому выражению Лапласа, изобретение логарифмов, «сократив труд астронома, удвоило его жизнь».

Первым из изобретателей логарифмов был шотландский любитель-математик Джон Непер (1550—1617), который ввел и самый термин «логарифмы». Вычисленные им таблицы вышли в свет в 1614 г. под названием «Описание удивительных таблиц логарифмов»; они содержали, кроме логарифмов чисел от 1 до 1449, также логарифмы синусов, косинусов и тангенсов, вычисленные через каждую минуту дуги.

Однако таблицы Непера были неудобны для вычислений, что, впрочем, заметил и сам их автор. Он не определил основания своей системы, не знал и самого понятия основания системы. То же число, которое соответствовало основанию его системы, было обратно основанию натуральных логарифмов. Логарифмы Непера убывали с воз-

растанием числа, а числа типа 10 имели логарифмы с большим числом значащих цифр.

Первым из ученых, внесших в логарифмы существенные усовершенствования, был Генри Бригг (1556—1630), профессор геометрии в Лондоне. В качестве основания системы логарифмов Бригг выбрал число 10.

В 1624 г. Бригг опубликовал «Логарифмическую арифметику», которая содержала 14-значные логарифмы чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Составление этих таблиц потребовало затраты огромного труда: для вычисления логарифма каждого опорного числа Бригг извлекал корень 54 раза с точностью до 32-го знака.

Одновременно с Бриггом над усовершенствованием изобретения Непера работал лондонский учитель математики Джон Спейдель, который в 1619 г. издал вычисленные им таблицы под названием «Новые логарифмы». Таблицы Спейделя включали логарифмы синусов, тангенсов и секансов. Несколько позже, в 1622 г., Спейдель опубликовал также таблицу логарифмов чисел. В качестве основания своей системы Спейдель избрал число e: от принятых в настоящее время натуральных логарифмов эта система отличалась лишь множителем 10^6.

В 1628 г. голландский математик Адриан Влакк опубликовал десятизначные таблицы логарифмов от 1 до 100 000, а несколько позже — десятизначные таблицы тригонометрических функций. Влакк в своих таблицах применил бригговы логарифмы.

Одновременно с Бриггом и Спейделем над усовершенствованием и облегчением вычислений работал в Праге великий астроном Иоганн Кеплер (1571—1630) и швейцарский часовщик Иост Бюрги (1552—1632). Разработанная ими система была опубликована Бюрги в 1620 г. под названием «Арифметические и геометрические таблицы прогрессий вместе с основательным поучением, как их нужно понимать и с пользой употреблять во всевозможных вычислениях». Таблицы содержали члены арифметической прогрессии с разностью 10 (логарифмы) и геометрической прогрессии с знаменателем 1,0001.

Способы вычислений, которые применяли первые изобретатели логарифмов, основаны на применении пропорций. С помощью последних, затрачивая громадный труд, они вычислили первые таблицы логарифмов. Впоследствии были найдены иные, более легкие способы вычислений, при помощи бесконечных рядов.

На русском языке таблицы логарифмов были изданы впервые в 1703 г. Составили их преподаватели Московской навигацкой школы Андрей Фархварсон, Стефан Гвин и Леонтий Магницкий. В свою «Универсальную арифметику» Леонард Эйлер включил главы, посвященные теории логарифмов.

В 1783 г. вышли из печати семизначные таблицы логарифмов, вычисленные австрийским математиком Георгом Вегой. Таблицы эти

благодаря тщательности своего выполнения стали незаменимым пособием при вычислениях и переиздавались на многих языках (в том числе и на русском) свыше полутораста лет, причем выдержали несколько сот изданий.

Почти одновременно с логарифмами была изобретена и счетная линейка. В 1620 г. Эдмунд Гюнтер сконструировал шкалу, расстояния которой были пропорциональны логарифмам чисел. С помощью циркуля можно было складывать и вычитать числа этой шкалы, производя таким образом операции умножения и деления.

Около 1622 г. Вильям Аутред изобрел круглую счетную линейку, но описание ее опубликовал лишь в 1632 г., а двумя годами позже он изобрел прямую линейку. Около 1630 г. ученик Аутреда Ричард Деламейн предложил несколько иную конструкцию круглой линейки.

Так как изобретение подобного счетного прибора отвечало нуждам мореплавателей и других специалистов, то вскоре после первых изобретений было предложено много новых конструкций линеек, более или менее отличающихся друг от друга. К числу изобретателей вскоре присоединился и И. Ньютон, предложивший конструкцию линейки для решения уравнений.

Если в XVII в. основным типом линейки был круглый, то в XVIII в. преимущественное распространение начинает приобретать прямоугольная линейка. В 1787 г. Уильям Никольсон (1753—1815) предложил ряд усовершенствований, придавших линейке почти современный вид.

В середине XIX в. усовершенствованием логарифмической линейки занялся известный французский геометр и механик Амеде Маннгейм (1831—1906). Предложенная им линейка находится в применении до настоящего времени. Изменения в конструкции линейки после 1850 г. касаются лишь незначительных частностей.

§ 41. Числовые последовательности

1. **Определения.** *Числовой последовательностью* называют функцию от натурального аргумента. Числа, входящие в состав числовой последовательности, называют ее *членами* *.

Последовательность часто задают такой записью:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

x_n называют общим членом последовательности.

---

* В математике различают последовательности и числовые последовательности. Членами последовательности могут быть любые предметы: линии, фигуры и т. д. Членами числовой последовательности являются только числа. Однако дальше мы будем рассматривать только числовые последовательности и для краткости их будем называть просто последовательностями.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кратко обозначается знаком $\{x_n\}$.

Примеры последовательностей:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots;$$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots;$$

$$1, -1, +1, \ldots, 1, -1, \ldots;$$

$$2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$$

Последняя последовательность является примером *постоянной* последовательности. Если в последовательности есть последний член, то она называется конечной. Если последовательность имеет бесконечное множество членов, она называется бесконечной. Конечная последовательность может быть задана перечислением членов. Чтобы задать бесконечную последовательность $\{x_n\}$, нужно указать правило, по которому любому натуральному числу n можно привести в соответствие некоторое число x_n.

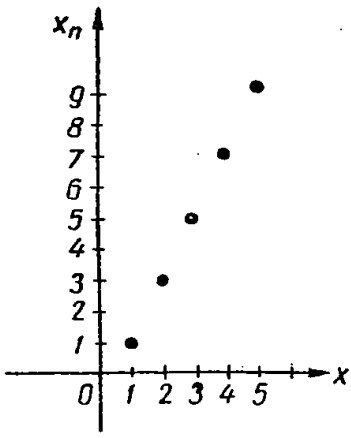


Рис. 67.

Как и функцию от действительного аргумента, последовательность можно задать с помощью формулы, табличным и графическим способами.

Например, последовательность нечетных натуральных чисел можно задать в виде формулы общего члена:

$$x_n = 2n - 1$$

или в виде таблицы:

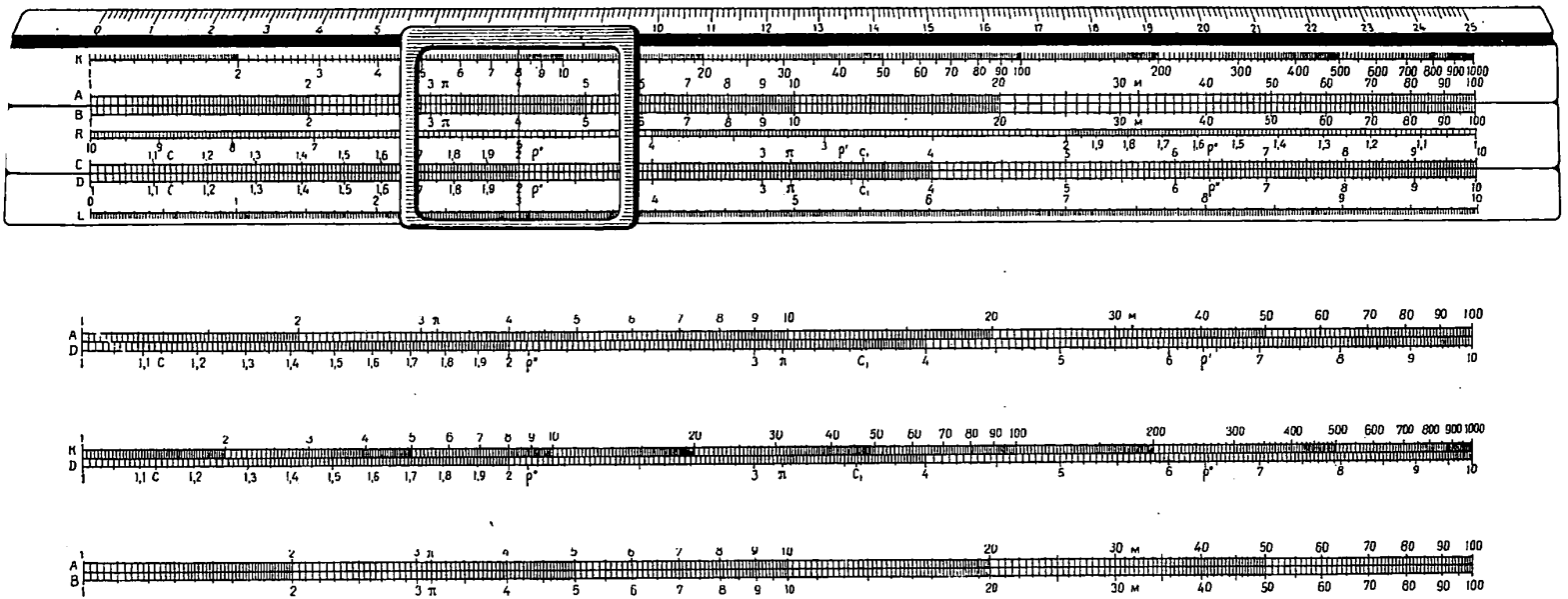
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$$

Можно задать ее также в виде графика, состоящего из изолированных друг от друга точек (рис. 67).

Можно задать эту последовательность и с помощью точек на числовой оси (рис. 68). Постоянной последовательности на числовой прямой соответствует одна точка. Последовательность

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$$

на числовой оси изображается так, как показано на рис. 69.


K
A
B
R
C
D
L
A
D
K
D
A
B

От задания последовательности с помощью формулы не трудно перейти к табличному или графическому способу ее задания.

Пример. Если $x_n = n + (-1)^n$, то, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим последовательность

$$0, 3, 2, 5, 4, 7, \ldots$$

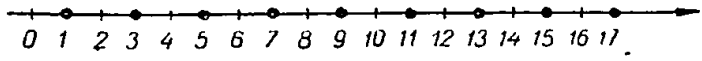


Рис. 68.

Еще пример. Если

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{для нечетных } n, \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{для четных } n, \end{cases}$$

то, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \ldots$ Однако, если последовательность задана в виде таблицы, иногда очень трудно определить аналитическое выражение ее. Например, для последовательности простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

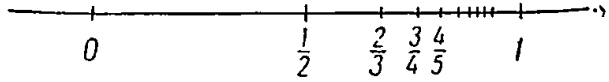


Рис. 69.

вообще не известен общий член, несмотря на то, что многие математики упорно искали его на протяжении нескольких веков.

2. **Предел последовательности.** Число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число N, зависящее от ε, такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся*. Последовательность не может иметь более одного предела. Предел последовательности не изменится, если в начале ее приписать или исключить несколько членов.

Если последовательность имеет предел, это значит, что она будет изображаться такими точками на числовой оси, что все они, начиная

с некоторой, лежат в произвольно малом отрезке, окружающем точку a: $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Так, например, если мы построим последовательность

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=1-\frac{1}{3},\quad x_3=1-\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad x_n=1-\frac{1}{n+1},\quad \ldots$$

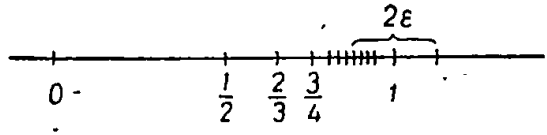


Рис. 70.

и окружим точку $x=1$ отрезком длины 2ε так, чтобы эта точка находилась в середине отрезка, то все точки $x_n=1-\frac{1}{n+1}$ войдут в этот отрезок (рис. 70), если только $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. если $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

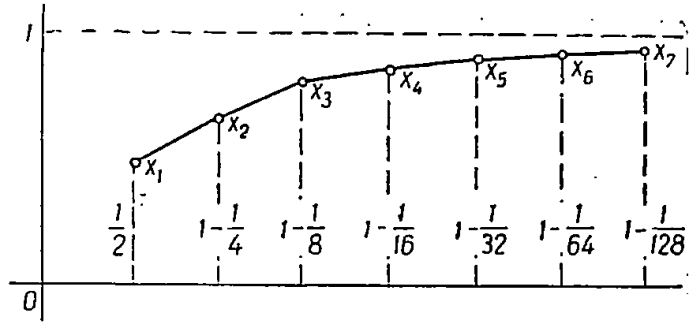


Рис. 71.

Если последовательность, имеющую пределом число a, изобразить графически в прямоугольной системе координат, получим совокупность точек, все время приближающихся к прямой $y=a$. Так, последовательность, изображенная на рис. 71, стремится слиться с прямой $y=1$, т. е. она имеет своим пределом 1. В этом легко убедиться, оценив разность

$$x_n-1=1-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}$$

по абсолютной величине. Имеем:

$$|x_n - 1| = \frac{1}{2^n}.$$

Тогда $|x_n - 1| < \varepsilon$, если $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, т. е. при n, удовлетворяющем неравенству $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Относительно последовательностей верны следующие утверждения.

а) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a и $a > b$ ($a < b$), то существует такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство $x_n > b$ ($x_n < b$).

б) Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, сходящиеся и всегда $x_n \geqslant y_n$, то $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

в) Если для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ всегда верны неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = a$, то и $\lim y_n = a$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Решение. Составим разность

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}.$$

Оценив эту разность по абсолютной величине, получим

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

если

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N.$$

Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ такое, что при $n > N$ будет справедливо требуемое неравенство. Следовательно, число 2 является пределом последовательности

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}.$$

Пример 2. Показать, что последовательность

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

не имеет предела.

Решение. Предположим противное, что $\{x_n\}$ имеет пределом a. Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда по определению должно существовать такое натуральное число N, что при $n > N$ будет $|x_n - a| < \frac{1}{2}$. Но среди значений $n > N$ всегда будут как четные, так и нечетные; если $n = 2k$, то $x_n = 1$, а если $n = 2k + 1$, то $x_n = -1$. Тогда имеют место неравенства:

$$|1 - a| < \frac{1}{2}, \quad |a - (-1)| < \frac{1}{2},$$

но тогда

$$2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

что невозможно, и предположение неверно; значит последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ не имеет предела.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$. Определить, для каких значений n величина

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

меньше 0,0001.

Решение. Для определения n надо решить неравенство

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} + \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{10^4},$$

или

$$\left|\frac{1}{3(2-3n)}\right| = \frac{1}{3|2-3n|} < \frac{1}{10^4},$$

отсюда

$$|2 - 3n| = 3n - 2, \quad 3(3n - 2) > 10^4,$$

$$n > \frac{10^4 + 6}{9} \approx 1111.$$

Таким образом, $\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right|$ будет меньше 0,0001 при $n \geqslant 1111$.

3. Ограниченные и неограниченные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если все члены ее меньше (больше) некоторого числа.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. если существуют такие числа m и M, что для всех n

$$m < x_n < M.$$

Все члены ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по своей абсолютной величине меньше некоторого числа $|x_n| < A$.

Последовательность, имеющая предел, ограниченна.

Последовательность $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}3$; $x_3 = 0{,}33$, ... ограниченна, так как $|x_n| < 1$.

Последовательность $x_n = (-1)^n$ также ограниченна, так как $|x_n| = 1$.

Примеры. Последовательность $\{x_n = n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ не ограниченна сверху, так как не существует такого числа M, чтобы все члены последовательности оставались меньше этого числа.

Последовательность $\{x_n = -n\}$, $n = -1, -2, -3, \ldots$ неограниченна снизу.

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для всякого наперед заданного числа A существует такое n, что $|x_n| > A$.

Если для любого положительного числа A можно указать такое число N, что при $n > N$, $x_n > A$, то говорят, что x_n стремится к плюс бесконечности, и это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \text{или } x_n \to +\infty.$$

Если для любого отрицательного числа A можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство $x_n < A$, то считают, что x_n стремится к минус бесконечности и записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{ или } x_n \to -\infty.$$

4. Монотонные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (убывающей), если каждый последующий член ее больше (меньше) предыдущего, т. е. если

$$x_{n+1} > x_n \ (x_{n+1} < x_n).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (невозрастающей), если каждый последующий член ее не меньше (не больше) предыдущего, т. е. если

$$x_{n+1} \geqslant x_n \ (x_{n+1} \leqslant x_n).$$

Последовательности возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются *монотонными*.

Пример 1. Показать, что последовательность

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

возрастающая.

Решение. Надо показать, что для каждого n

$$x_{n+1} > x_n, \text{ или } x_{n+1} - x_n > 0.$$

Действительно,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Для монотонных последовательностей справедлива теорема:

Если монотонно возрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она имеет предел, в противном случае она стремится к $+\infty$. Монотонно убывающая последовательность $\{x_n\}$, ограниченная снизу, имеет конечный предел, в противном случае она стремится к $-\infty$.

Пример 2. Исследовать на сходимость последовательность.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Решение. Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая, так как

$$x_{n+1} > x_n \left(x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

и при любом n имеет место неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}.$$

Принимая во внимание, что

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

получаем $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} < 2.$

Как видим, данная последовательность монотонно вырастающая и ограниченная сверху, поэтому она имеет предел.

Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $N = N(\varepsilon)$ *, при котором справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ при всяком n, большем $N(\varepsilon)$, и при произвольном натуральном числе p (критерий Коши).

Пример. Исследовать на сходимость последовательность

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Решение. Применяя критерий Коши, получаем:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}.$$

По этому критерию разность должна быть меньше ε для всякого натурального числа p. Предположим, что $p = n$, тогда имеем:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

следовательно, условие Коши не выполняется, если взять $p = n$. Значит последовательность расходящаяся.

5. Действия с последовательностями. Теоремы о пределах. Суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности: $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, причем в последнем случае предполагается, что последовательность $\{y_n\}$ не содержит нулей.

Для сходящихся последовательностей справедливы теоремы: если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то сходящимися будут также последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. В последнем случае предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Верны следующие формулы:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

* Запись $N = N(\varepsilon)$ обозначает, что число N зависит от ε.

Эти равенства читаются так:

предел суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей, имеющих пределы, равен соответственно сумме, разности, произведению и частному пределов этих последовательностей. При этом в последнем случае (для частного) предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Пример. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$$

(n — натуральное число).

Найти пределы последовательностей:

$$\left\{3x_n + \frac{y_n}{2}\right\}, \quad \left\{\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + x_n\right\}.$$

Решение. Применяя теоремы о пределах сходящихся последовательностей, получаем:

$$а)\ \lim_{n\to\infty}\left(3x_n + \frac{y_n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}(3x_n) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 3^{*} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}^{*} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}.$$

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + \lim_{n\to\infty} x_n =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} + \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

---

* $\lim\limits_{n\to\infty} 3$ следует рассматривать как предел последовательности 3, 3, . . . , 3, . . . , а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}$ как предел последовательности $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots$

§ 42. Арифметическая прогрессия

1. Определения. *Арифметической прогрессией* называется числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для этой последовательности числом (положительным или отрицательным).

Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами. Арифметическую прогрессию записывают так:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Общий член ее обозначают через a_n.

Число, которое надо прибавить к какому-нибудь члену, чтобы получить последующий, называется *разностью арифметической прогрессии;* ее обычно обозначают буквой d.

Пример 1. Последовательность чисел 10, 14, 18, 22, ..., $6+4n$, ... есть арифметическая прогрессия с разностью 4.

Пример 2. Последовательность чисел 1, —1, —3, ..., $3-2n$ есть арифметическая прогрессия с разностью —2.

Арифметическая прогрессия называется *возрастающей*, если всякий последующий член больше предыдущего (т. е. если $d>0$); и *убывающей*, если всякий последующий член меньше предыдущего ($d<0$).

Любой член арифметической прогрессии равен первому ее члену, сложенному с произведением разности прогрессии на число членов, предшествующих определяемому, т. е. он выражается формулой:

$$a_k = a_1 + (k-1)\,d.$$

Всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов, т. е.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое членов, равноудаленных от него, т. е.

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

Во всякой арифметической прогрессии $a_m + a_n = a_p + a_q$, если $m+n=p+q$. В частности, если прогрессия имеет конечное число членов, то сумма двух членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т. е.

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулами

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}, \quad s_n = \frac{[2a_1 + d\,(n-1)]\,n}{2}.$$

Используя формулу суммы n первых членов прогрессии, можно вычислить суммы одинаковых степеней натуральных чисел:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}.$$

2. Задачи на арифметическую прогрессию.

Задача 1. Определить последний член арифметической прогрессии, в которой

$$a_1 = 110,\ d = -10,\ n = 11.$$

Решение.

$$a_n = a_1 + d\,(n-1),\ a_n = 110 - 10\,(11-1) = 110 - 10 \cdot 10 = 10.$$

Ответ. $a_{11} = 10$.

Задача 2. Найти сумму членов арифметической прогрессии, в которой

$$a_1 = 100,\ d = -2,\ n = 30.$$

Решение.

$$a_{30} = 100 + (-2) \cdot 29 = 100 - 58 = 42,$$

$$s_{30} = \frac{(100 + 42)\,30}{2} = \frac{142 \cdot 30}{2} = 71 \cdot 30 = 2130.$$

Ответ. $s_{30} = 2130$.

Задача 3. Определить первый член и сумму членов арифметической прогрессии, в которой

$$n = 45,\quad d = 10,\quad a_n = 459.$$

Решение.

$$a_n = a_1 + d\,(n-1),\quad a_1 = a_n - d\,(n-1);$$

$$a_1 = 459 - 10 \cdot 44 = 459 - 440 = 19,\quad a_1 = 19;$$

$$s_n = \frac{(459 + 19)\,45}{2} = \frac{478 \cdot 45}{2} = 239 \cdot 45 = 10\,755.$$

Ответ. 19; 10 755.

Задача 4. Определить число членов и сумму членов арифметической прогрессии, в которой

$$a_1 = 0, \quad d = \frac{1}{2}, \quad a_n = 5.$$

Решение.

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d},$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1; \quad n = \frac{5-0}{\frac{1}{2}} + 1 = 10 + 1 = 11; \quad n = 11.$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(0+5)\cdot 11}{2} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}.$$

Ответ. 11; $27\frac{1}{2}$.

Задача 5. Между членами 7 и 35 поместить 6 чисел, которые с данными числами составили бы арифметическую прогрессию.

Решение. Из условия задачи следует, что $a_1 = 7$, $a_n = 35$, $n = 8$. Тогда из формулы $a_n = a_1 + d(n-1)$ имеем:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{35-7}{8-1} = 4.$$

Следовательно, находим прогрессию 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, где числа 11, 15, 19, 23, 27, 31 искомые.

Ответ. 11, 15, 19, 23, 27, 31.

Задача 6. Определить первый член, разность и число членов арифметической прогрессии, в которой

$$a_n = 55, \quad a_2 + a_5 = 32{,}5; \quad s_{15} = 412{,}5.$$

Решение.

$$a_2 + a_5 = 32{,}5; \quad (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 32{,}5;$$

$$s_{15} = 412{,}5; \quad \frac{(a_1 + a_{15})^{15}}{2} = 412{,}5.$$

После преобразований получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 32{,}5, \\ 15a_1 + 105d = 412{,}5, \end{cases}$$

откуда

$$d = 2{,}5; \quad a_1 = 10.$$

Тогда

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{55 - 10}{2{,}5} + 1 = 19.$$

Ответ. 10; 2,5; 19.

Задача 7. Найти четыре последовательных нечетных числа, зная, что сумма их квадратов больше суммы квадратов заключенных между ними четных чисел на 48.

Решение. Обозначим нечетные числа через n, $(n + 2)$, $(n + 4)$, $(n + 6)$. Тогда заключенные между ними четные числа будут $(n + 1)$, $(n + 3)$, $(n + 5)$. Согласно условию

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + (n + 6)^2 = \\ = (n + 1)^2 + (n + 3)^2 + (n + 5)^2 + 48,$$

или

$$n^2 + [(n + 2)^2 - (n + 1)^2] + [(n + 4)^2 - (n + 3)^2] + \\ + [(n + 6)^2 - (n + 5)^2] - 48 = 0,$$

отсюда

$$n^2 + 6n - 27 = 0.$$

Решив уравнение, получим $n_1 = 3$; $n_2 = -9$. Следовательно, искомыми числами будут 3, 5, 7, 9, или —9, —7, —5, —3.

Ответ. 3, 5, 7, 9; —9, —7, —5, —3.

§ 43. Геометрическая прогрессия

1. **Общие сведения.** *Геометрической прогрессией* называется такая числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же число, постоянное для этой последовательности.

Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами. Геометрическую прогрессию записывают так:

$$\div\, u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Общий член прогрессии обозначают через u_n.

Число, на которое надо умножить любой член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий, называется *знаменателем* геометрической прогрессии; он обозначается буквой q.

Отсюда следует, что частное от деления каждого члена геометрической прогрессии на предыдущий равно знаменателю прогрессии. Знаменатель прогрессии может быть и положительным, и отрицательным числом.

Пример 1. Последовательность 8, —16, 32, —64, 128, —256, 512, ..., есть геометрическая прогрессия со знаменателем —2.

Пример 2. Последовательность $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots, 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2}$.

Всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии в степени, показатель которой равен числу членов, предшествующих определяемому, т. е. выражается формулой

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Отсюда следует, что геометрическую прогрессию, у которой первый член a, знаменатель q и число всех членов n, можно записать так:

$$\div u,\ uq,\ uq^2,\ \ldots,\ uq^{n-1}.$$

Всякий член геометрической прогрессии связан с предыдущим и последующим ему членами такой зависимостью:

$$u_n^2 = u_{n-1} u_{n+1}.$$

Во всякой геометрической прогрессии $u_m u_n = u_p u_q$, если $m + n = p + q$. В частности, если прогрессия имеет конечное число членов, то произведение двух членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов.

Сумма членов геометрической прогрессии выражается формулой

$$S = \frac{u_n q - u_1}{q - 1} \quad (q \neq 1),$$

или

$$S = \frac{u_1 - u_n q}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по абсолютной величине меньше 1, называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*.

Примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$-0{,}5, -0{,}05, -0{,}005, -0{,}0005, \ldots$$

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют предел суммы n ее первых членов при бесконечном возрастании n ($n \to \infty$).

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \lim_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n).$$

Следовательно, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна частному от деления первого члена этой прогрессии на разность единицы и знаменателя прогрессии.

2. **Задачи на геометрическую прогрессию.**

Задача 1. Вычислить пятый член геометрической прогрессии, в которой первый член равен 3, а знаменатель прогрессии 2.

Решение. $u_1 = 3$, $q = 2$; $u_5 = u_1 q^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48$.

Ответ. $u_5 = 48$.

Задача 2. Найти сумму членов геометрической прогрессии, в которой $u_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$.

Решение.

$$u_5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-7\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = 15\frac{1}{2}.$$

Ответ. $15\frac{1}{2}$.

Задача 3. Определить первый член и сумму членов геометрической прогрессии, в которой

$$q = \frac{1}{2}, \quad n = 10, \quad u_{10} = 7.$$

Решение.

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \quad u_{10} = u_1 q^9.$$

Отсюда

$$u_1 = \frac{u_{10}}{q^9} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = 7 \cdot 2^9 = 7 \cdot 512 = 3584;$$

$$S = \frac{3584 - 7 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3584 - 3{,}5}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3581{,}5 = 7163.$$

Ответ. 3584, 7163.

Задача 4. Определить первый и последний члены геометрической прогрессии, в которой

$$n = 8, \quad q = 2, \quad S_8 = 765.$$

Решение. Используя формулы общего члена и суммы прогрессии, получаем:

$$u_8 = u_1 \cdot 2^7, \qquad 765 = \frac{(u_1 2^8 - u_1)}{2 - 1},$$

или

$$u_8 = u_1 \cdot 128, \quad 765 = u_1 (2^8 - 1).$$

Решив эти уравнения относительно u_1 и u_8, получим:

$$u_1 = 3, \quad u_n = 384.$$

Ответ. 3; 384.

Задача 5. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних 21.

Решение.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168;$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 21,$$

или

$$a + aq + aq^2 = 168;$$
$$aq^3 + aq^4 + aq^5 = 21.$$

Отсюда

$$a(1 + q + q^2) = 168;$$
$$aq^3(1 + q + q^2) = 21.$$

Значит, $\frac{1}{q^3} = 8$, $q = \frac{1}{2}$. Тогда $a = 96$.

Ответ. 96, 48, 24, 12, 6, 3.

Задача 6. Найти три числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, сумма квадратов этих чисел 364.

Решение. Так как a_1, a_2, a_3 образуют геометрическую прогрессию, то $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$. Тогда по условию имеем:

$$a + aq + aq^2 = 26,$$
$$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 364,$$

Решив систему, получим: $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$ и $a = 2$. Так как прогрессия возрастающая, то ее знаменатель будет 3.

Ответ. 2, 6, 18.

Задача 7. Три положительных числа, дающие в сумме 21, составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение.

$$\div a,\ a+d,\ a+2d.$$
$$\div a+2,\ a+d+3,\ a+2d+9.$$

Согласно условию, имеем:

$$a+a+d+a+2d=21,$$

или

$$3a+3d=21,$$

или

$$a+d=7.$$
$$\frac{a+2d+9}{a+d+3}=\frac{a+d+3}{a+2}.$$

После преобразований получим:

$$d^2+2d-5a-9=0.$$

Так как $a=7-d$, то $d^2+7d-44=0$; $d_1=4$, $d_2=-11$. Тогда $a_1=3$, $a_2=18$.

Второе значение не удовлетворяет условию задачи, так как оно приводит к числам 18, 7 и —4, а последнее из них неположительное. Следовательно, $d=4$ и $a=3$. Тогда имеем такие числа: 3, 7, 11.

Ответ. 3, 7, 11.

Задача 8. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sqrt{\frac{3}{2}},\quad \sqrt{\frac{2}{3}},\quad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ \ldots$$

Решение.

$$q=\sqrt{\frac{2}{3}}:\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3};\quad S=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1-\frac{2}{3}}=3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ. $3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Задача 9. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5, а сумма первого и второго членов ее 12. Найти эту прогрессию.

Решение. По условию, $S = 12{,}5$; $u_1 + u_2 = 12$. Имеем: $u_1 + u_1 q = 12$; $12{,}5 = \frac{u_1}{1-q}$.

Исключив из этой системы u_1, получим квадратное уравнение

$$12{,}5q^2 - 0{,}5 = 0.$$

Тогда $q = \pm \frac{1}{5}$; $u_1 = 12 : (1 + q) = 10$ или $u_1 = 15$.

Ответ. $\mp 10;\ 2;\ \frac{2}{5};\ \ldots$ и

$\mp 15;\ -3;\ \frac{3}{5};\ \ldots$

3. Исторические сведения о прогрессиях. Прогрессии встречаются уже у математиков глубокой древности — в папирусе Ахмеса, у Архимеда, у некоторых китайских математиков. Древние индийские математики также знали арифметическую и геометрическую прогрессии, а Брахмагупта (628 г. н. э.) рассматривал, кроме того, последовательности, построенные из квадратов и кубов чисел натурального ряда.

Само слово «прогрессия» было введено римскими математиками, его употреблял, в частности, Боециус (510 г. н. э.).

Старые математики связывали между собой понятия «пропорции» и «прогрессии». Прилагая к пропорциям наименования арифметической, геометрической и гармонической, они считали, что пропорция является ничем иным, как четырехчленной прогрессией. Большинство из них давало лишь формулу суммы прогрессии, причем без доказательства; некоторые приводили также формулу для определения последнего члена арифметической прогрессии, также без доказательства. Правило для нахождения любого члена арифметической прогрессии было дано Карданом в 1539 г.

Формула для суммы членов геометрической прогрессии впервые в западноевропейской литературе встречается в книге Фибоначчи (1202 г.), затем ее приводит Пойербах (1460 г.). Формула эта для суммирования бесконечной прогрессии была обобщена французским математиком Виетом в 1590 г.

§ 44. Метод математической индукции

Во многих разделах современной математики используется метод доказательства, который называется *методом математической индукции*. В его основе лежит следующая аксиома индукции. Если некоторое утверждение справедливо для $n = 1$ и если из допущения справедливости его для какого-нибудь произвольного натурального $n = k$ следует справедливость его и для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо для всякого натурального n.

Пример 1. Доказать формулу общего члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d.$$

Доказательство. Она верна для $n = 1$, так как тогда будет $a_1 = a_1$. Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е. $a_k = a_1 + (k - 1)\,d$. Тогда $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)\,d + d = a_1 + kd$.

Как видим, если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Для $n = 1$ она верна. Следовательно, доказываемая формула верна при каждом натуральном значении n.

Пример 2. Доказать, что при любом n

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Доказательство. При $n = 1$ это равенство верно: $1 = 1$.

Предположим, что оно верно при некотором произвольном $n = k$ т. е., что

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Тогда, прибавив к обеим его частям одно и то же число $2k + 1$, получим

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1,$$

или

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2\,(k + 1) - 1] = (k + 1)^2.$$

Итак, рассматриваемое равенство справедливо при $n = 1$, и из допущения справедливости его при $n = k$ вытекает, что оно справедливо и при $n = k + 1$. Следовательно, оно верно при каждом натуральном n.

Методом математической индукции можно доказывать и такие утверждения, которые при $n = 1$ не верны, но которые верны, начиная с некоторого натурального p, большего 1. При этом используют такое следствие из аксиомы индукции: если некоторое утверждение справедливо для $n = p$ и если из допущения справедливости его для какого-нибудь $n = k \geqslant p$ вытекает справедливость его и для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо для всех натуральных чисел, начиная с p.

Пример 3. Доказать, что при всех $n \geqslant 5$ имеет место неравенство

$$2^n > n^2.$$

Доказательство. При $n = 5$ это неравенство верно, так как $32 > 25$.

Предположим, что при некотором произвольном $k \geqslant 5$

$$2^k > k^2,$$

тогда должно быть верным также неравенство

$$2^k + 2^k > k^2 + k^2.$$

Но так как $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ и при $k \geqslant 5$ $k^2 > 2k + 1$, то из предположения следует

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1,$$

или

$$2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Как видим, если данное неравенство верно при $n = k \geqslant 5$, то оно верно и при $n = k + 1$. При $n = 5$ оно верно. Следовательно, это неравенство справедливо при всех натуральных $n \geqslant 5$.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

§ 45. Комплексные числа

1. Определения. В множестве действительных чисел не всякое уравнение степени выше первой имеет решение. Так, например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, поскольку не существует действительного числа, квадрат которого равен числу -1. Это привело к расширению множества действительных чисел путем введения чисел новой природы. Эти новые числа называют мнимыми.

Число, удовлетворяющее равенству $x^2 = -1$, обозначают буквой i, оно называется *мнимой единицей* *. Таким образом, $i^2 = -1$.

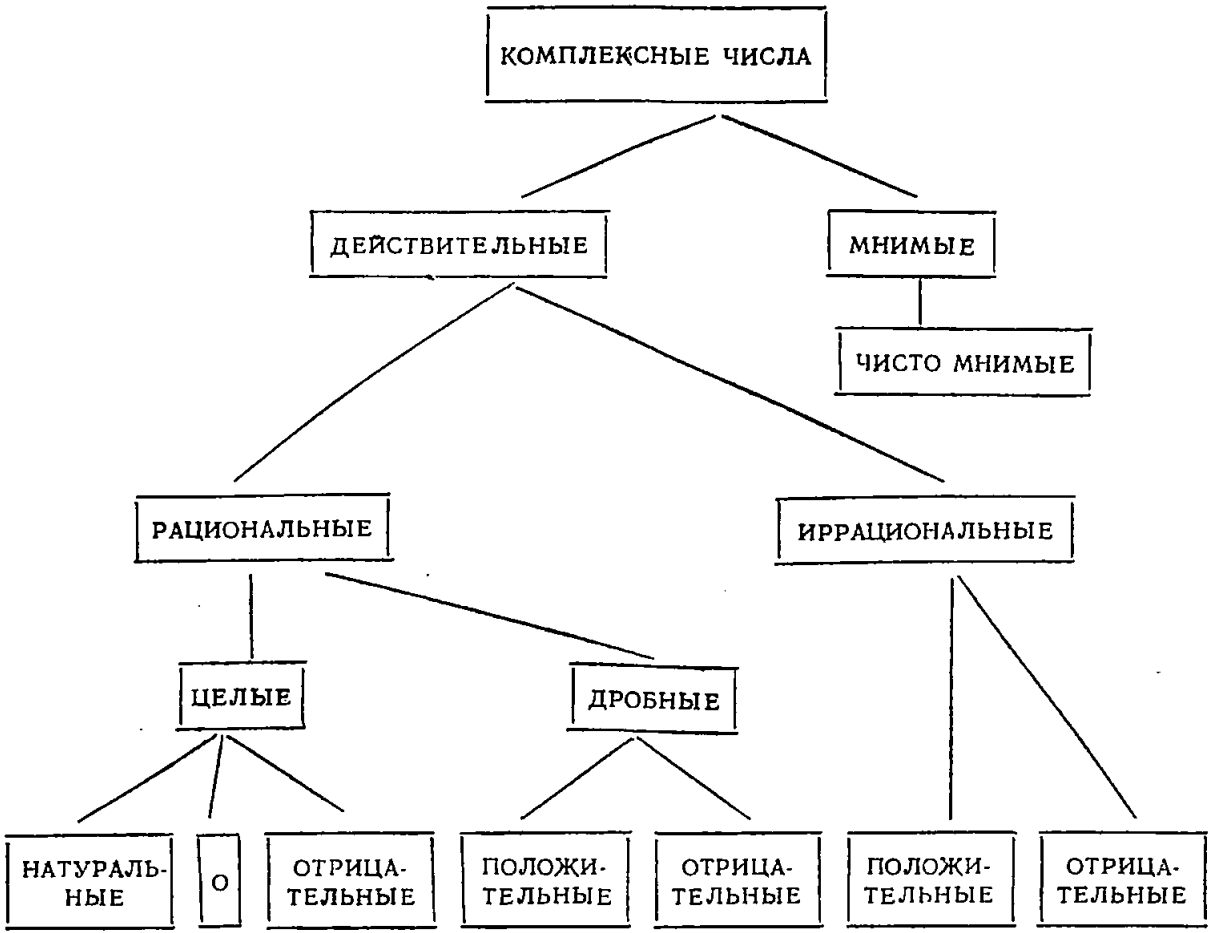
Число $z = a + bi$, где a и b — любые действительные числа; i — мнимая единица, называется комплексным числом. Числа a и bi называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z.

При $a = 0$ комплексное число $a + bi$ обращается в чисто мнимое число bi; при $b = 0$ получим число $a + 0i$, т. е. действительное число a.

Таким образом, множество комплексных чисел включает в себя и все действительные числа. Каждое известное нам число, например $2{,}0$, $\frac{2}{13}$, $0{,}06$, $\sqrt{5}$, $3 + i$, i, можно назвать комплексным числом. На схеме (стр. 372), показано, как связаны между собой различные виды чисел.

---

* Существуют два различных мнимых числа, удовлетворяющих равенству $x^2 = -1$. Мнимой единицей называют только одно из них. Его обозначают символом i. Второе число, удовлетворяющее этому же равенству, обозначают символом $-i$ и называют числом, сопряженным к мнимой единице.


КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ
МНИМЫЕ
ЧИСТО МНИМЫЕ
РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ
ЦЕЛЫЕ
ДРОБНЫЕ
НАТУРАЛЬ-НЫЕ
0
ОТРИЦА-ТЕЛЬНЫЕ
ПОЛОЖИ-ТЕЛЬНЫЕ
ОТРИЦА-ТЕЛЬНЫЕ
ПОЛОЖИ-ТЕЛЬНЫЕ
ОТРИЦА-ТЕЛЬНЫЕ

Комплексные числа вида $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными*. Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются *противоположными*.

Два комплексных числа $a+bi$ и $a'+b'i$ считаются равными в том и только в том случае, если

$$a=a', \quad b=b'.$$

Из этого определения вытекает, что комплексное число $a+bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$.

Примечание. Относительно комплексных чисел не принято никакого соглашения, какое из них считать больше другого.

2. Действия над комплексными числами. Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над вещественными. Чтобы произвести какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a+bi$, надо произвести действия над двучленами такого вида по тем правилам, которые известны для двучленов с вещественными членами, и, наконец, в результате заменить везде i^2 на -1. Исходя из этого, действия над комплексными числами определяются так.

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$ называется комплексное число $(a+a')+(b+b')i$.

Отсюда следует, что сумма сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ равна действительному числу * $2a$, комплексное число $a+bi$ можно рассматривать как сумму вещественного числа a и чисто мнимого числа bi.

Примеры. $(4+2i)+(-3+i)=1+3i$; $(0+2i)+(0+5i)=0+7i$, т. е. $2i+5i=7i$; $(-5+8i)+(-3-8i)=-8$.

Для сложения комплексных чисел справедливы те же основные законы, что и для вещественных чисел:

$$(a+bi)+(c+di)=(c+di)+(a+bi)$$
$$[(a+bi)+(c+di)]+(m+ni)=(a+bi)+[(c+di)+(m+ni)].$$

Вычитание. Исходя из определения вычитания как действия, обратного сложению, разность комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$ находят так:

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i.$$

Разностью двух комплексных чисел может быть комплексное, действительное и чисто мнимое число.

Примеры. $(1-i)-(2-3i)=-1+2i$; $(4+5i)-(2+5i)=2+0i=2$; $(9-8i)-(9+8i)=-16i$.

---

* Сумма двух несопряженных комплексных чисел тоже может быть действительным числом, например $(7+3i)+(2-3i)=9$.

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$ называется комплексное число

$$(aa'-bb')+(ab'+ba')\,i.$$

Отсюда следует, что для умножения комплексных чисел достаточно перемножить их как алгебраические двучлены и в полученном результате заменить $i^2=-1$.

Произведение сопряженных чисел* $a+bi$ и $a-bi$ есть вещественное число, равное a^2+b^2.

Пример. $(2+i)(2-i)=4-i^2=5$.

Умножение комплексных чисел подчиняется тем же основным законам, что и умножение действительных чисел.

Деление. Деление комплексных чисел можно определить, как действие, обратное умножению. Отсюда следует, что частное от деления комплексного числа $a+bi$ на число $a'+b'i$ равно

$$\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\,i.$$

Практически удобнее всего деление комплексных чисел проводить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, после чего делитель станет действительным положительным числом, а затем провести деление действительной и мнимой частей отдельно.

Пример.

$$\frac{-2+5i}{-3-4i}=\frac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=\frac{-14-23i}{25}=-0{,}56-0{,}92i.$$

Возведение в степень. Предварительно найдем результаты от возведения в степень мнимой единицы i, зная что $i^2=-1$.

$$\begin{array}{llll} i^1=i; & i^3=-i; & i^5=i; & i^7=-i; \\ i^2=-1; & i^4=1; & i^6=-1; & i^8=1. \end{array}$$

Мы получили, таким образом, четыре чередующихся значения:

$$i^{4k}=+1;\quad i^{4k+1}=i;\quad i^{4k+2}=-1;\quad i^{4k+3}=-i,$$

где

$$k=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2 \text{ и т. д.}$$

Следует иметь в виду, что i^0 принимается равным 1.

---

* Произведение двух несопряженных комплексных чисел тоже может быть действительным числом; например $(2+3i)(4-6i)=26$. Если же и сумма, и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами, то эти комплексные числа непременно сопряженные.

Возведение комплексного числа в целую степень производится так:

$$(a+bi)^n = \underbrace{(a+bi)\,(a+bi)\cdots(a+bi)}_{n \text{ раз}};$$

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n}.$$

Здесь n — натуральное число. Умножение можно проводить последовательно. Кроме того, принимается $(a+bi)^0 = 1$.

Извлечение квадратного корня. Извлечение корня из комплексного числа есть действие, обратное возведению в степень, посредством которого по данной степени (подкоренное число) и данному показателю степени (показатель корня) находят основание (корень). В множестве комплексных чисел действие извлечения корня всегда выполнимо, и в результате получается столько значений, каков показатель корня. В частности, квадратный корень имеет два значения, которые находят по формуле

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

где знак «+» в скобках берется при $b>0$, а знак «—» — при $b<0$.

Пример.

$$\sqrt{5+12i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) = (\sqrt{9} + i\sqrt{4}) = \pm(3+2i).$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Известно, что действительные числа можно изображать точками на прямой. Комплексные числа $z = a+bi$ взаимно однозначно сопоставляются с парами действительных чисел (a, b). Поэтому комплексное число $z = a+bi$ условились геометрически изображать точкой M, у которой в прямоугольной системе координат абсцисса равна a, а ордината b (рис. 72).

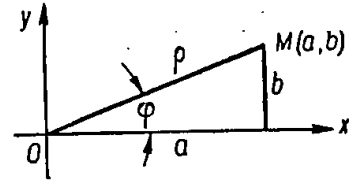


Рис. 72.

Комплексное число можно также изображать направленным отрезком (вектором) OM, т. е. отрезком прямой, у которого указано, какая из ограничивающих его точек является началом и какая концом. В нашем случае O есть начало, а M — конец. Значит, комплексное число $z = a+bi$ изображают вектором, начало которого совпадает

с началом координат, а конец — с точкой M. Сам вектор обозначают $\vec{OM}$; направление вектора указывает стрелка на его конце.

Длина вектора, изображающего комплексное число, называется *модулем* этого комплексного числа. Модуль всякого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначают $|a+bi|$, а также буквой r. Из чертежа (рис. 72) видно, что

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением. Сопряженные комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ имеют один и тот же модуль.

Примеры.

$$|3+5i|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34};\quad |-7|=|-7+0\cdot i|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=$$
$$=7;\quad |4i|=|0+4i|=\sqrt{0^2+4^2}=4.$$

Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и вектором OM, изображающим комплексное число $a+bi$, называется *аргументом* комплексного числа $a+bi$. Каждое комплексное число, не равное нулю, имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на целое число оборотов (т. е. на $360°\,k$, где k — любое целое число) *.

Аргумент φ комплексного числа $a+bi$ связан с a и b следующими формулами:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Однако ни одна из них в отдельности не позволяет найти аргумент по абсциссе и ординате. Покажем это на примерах.

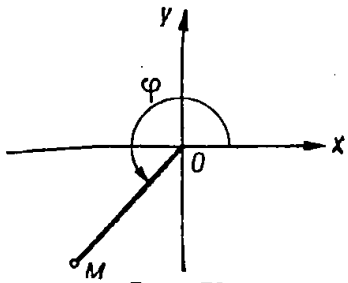


Рис. 73.

Пример. Найти аргумент комплексного числа $-3-3i$.

Решение. Первый способ. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3}{-3}=1$. Этому условию удовлетворяют как угол 45°, так и угол 225°. Но угол 45° не является аргументом числа $-3-3i$ (рис. 73). Правильный ответ будет $\varphi=225°$ (или $-135°$, или 585° и т. д.). Этот результат получится, если учесть, что абсцисса и ордината данного комплекс-

*Для комплексного числа $z=0$ аргумент теряет смысл.

ного числа отрицательны. Значит, точка M лежит в третьей четверти.

Второй способ. $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Формула для $\sin\varphi$ показывает, что он тоже отрицателен. Значит, угол φ принадлежит третьей четверти, так что $\varphi = 225° \pm 360° k$.

Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента называется главным. Так, для комплексного числа $-3 - 3i$ *главное значение аргумента* равно $-135°$.

Аргумент действительного положительного числа имеет главное значение 0°; для отрицательных чисел главным значением аргумента принято считать 180° (а не —180°).

У сопряженных комплексных чисел главные значения аргумента имеют одни и те же абсолютные значения, но противоположные знаки. Так, главные значения аргумента чисел $-3 + 3i$ и $-3 - 3i$ равны соответственно 135° и —135°.

Для обозначения аргумента $z = a + bi$ приняты обозначения $\varphi = \operatorname{Arg} z$, или $\varphi = \arg z$. Первое употребляется для всевозможных значений аргумента; второе — для главного значения аргумента, выделяемого неравенством $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

§ 46. Тригонометрическая форма комплексного числа

1. Определения. Общая форма записи комплексного числа, т. е. форма $a + bi$, называется *алгебраической*. Абсцисса a и ордината b комплексного числа $a + bi$ выражаются через модуль r и аргумент φ (рис. 73) формулами

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Тогда получим:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Последнее выражение называется *тригонометрической формой комплексного числа* с модулем r и аргументом φ. Любое число $z \neq 0$ может быть представлено в тригонометрической форме.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме число $-3 + 2i$.

Решение. $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{3} = -0{,}666\ldots$

Тангенс отрицателен, следовательно, значение φ надо искать во второй и четвертой четвертях. Обращаясь к формулам для $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, замечаем, что при $a = -3$ и $b = 2$ синус будет положителен, а коси-

нус отрицателен, что имеет место во второй четверти *. По таблицам находим $\varphi = 146° 18'$, значит $-3+2i = \sqrt{13}(\cos 146° 18' + i \sin 146° 18')$.

Пример 2. Представить в тригонометрической форме число $1 - i$.

Решение. Имеем: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = -1$. Здесь $a = 1$, а $b = -1$. Следовательно, φ находится в четвертой четверти. Отсюда находим $\varphi = 315°$ и можем написать:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°).$$

Примечание. Так как $315° = 360° - 45°$ и $\cos 315° = \cos 45°$; $\sin 315° = \sin(-45°) = -\sin 45°$, то это число можно записать и так:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 45° - i \sin 45°).$$

Пример 3. Представить в тригонометрической форме действительное число $m > 0$.

Решение. Так как $m = m + 0 \cdot i$, то $a = m$, $b = 0$, и тогда

$$r = \sqrt{m^2 + 0^2} = m; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{m} = 0; \quad \cos\varphi = \frac{m}{m} = 1.$$

Следовательно, $\varphi = 0$ и можно написать:

$$m = m(\cos 0° + i \sin 0°)$$

или в общем виде

$$m = m(\cos 360° k + i \sin 360° k).$$

Отсюда делаем вывод, что модулем положительного числа является само это число, а аргументом его есть 0° (или $360° k$).

Пример 4. Представить в тригонометрической форме отрицательное число $-m$ $(m > 0)$.

Решение. Так как $-m = -m + 0 \cdot i$, то $a = -m$, $b = 0$, и мы имеем: $r = m$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$. Следовательно, $\varphi = 180°$, и тогда

$$-m = m(\cos 180° + i \sin 180°),$$

или в общем виде:

$$-m = m[\cos(180° + 360° k) + i \sin(180° + 360° k)] =$$
$$= m[\cos 180° (2k + 1) + i \sin 180° (2k + 1)].$$

Следовательно, модулем отрицательного числа является его абсолютная величина, а аргумент равен 180°, или в общем виде $180° (2k+1)$.

---

* Удобнее четверть определять по знакам при a и b. В данном случае $a = -3$, $b = +2$. Точку с такими координатами находят во второй четверти.

Пример 5. Выразить в алгебраической форме число

$$4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Решение. Так как

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

то имеем:

$$4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Далее рассмотрим, как выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Сложение и вычитание комплексных чисел проще и удобнее проводить, когда они даны в алгебраической форме. Для остальных алгебраических действий более удобна тригонометрическая форма.

2. **Умножение.** Пусть даны два комплексных числа z_1 и z_2. Записав их в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

и перемножив, получим:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.* Это правило верно и для любого числа сомножителей.

Пример. а) Пусть

$$z_1 = 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ);$$
$$z_2 = 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ),$$

тогда

$$z_1 z_2 = 6(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ).$$

б) Перемножить

$$2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ), \ 3[\cos(-160^\circ) + i \sin(-160^\circ)]$$
$$\text{и } 0{,}5(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ).$$

Решение. Модуль произведения $2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 3$. Аргумент произведения $150^\circ - 160^\circ + 10^\circ = 0^\circ$. Произведение равно $3(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$.

в) Перемножить

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r^2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = r^2,$$

значит произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительное число, равное квадрату их общего модуля.

3. **Деление.** Пусть требуется число $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ разделить на число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Будем иметь

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2$ после преобразований, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя.*

Пример. Пусть

$$z_1 = \sqrt{3}(\cos 200° + i\sin 200°),$$
$$z_2 = 2[\cos(-160°) + i\sin(-160°)].$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 360° + i\sin 360°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. **Возведение в степень.** Умножая число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ само на себя n раз, по правилу умножения комплексных чисел, получаем

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Значит, *модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля основания, а аргумент равен аргументу основания, умноженному на показатель степени.*

В частном случае, если $r = 1$, то предыдущее равенство принимает вид:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула носит название формулы Муавра, по имени английского математика Муавра (1667—1754).

Примеры. а) Возвести в куб число

$$z = 2(\cos 20° + i\sin 20°).$$

Решение.

$$z^3 = 8(\cos 60° + i\sin 60°) = 4 + 4\sqrt{3}i,$$

так как

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Возвести в 20-ю степень число $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Решение. Записав его в тригонометрической форме

$$z = 1 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ),$$

найдем:

$$z^{20} = 1^{20} (\cos 1200^\circ + i \sin 1200^\circ) =$$

$$= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

в) Найти выражение косинуса и синуса угла 3φ через косинус и синус угла φ.

Решение.

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 =$$
$$= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi =$$
$$= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i (3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3\sin^2 \varphi \cos \varphi; \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Примечание. Можно так же найти $\cos 4\varphi$, $\sin 4\varphi$ и общие формулы для $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$.

5. Извлечение корня. Корень n-й степени из комплексного числа извлекается с помощью формулы

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Здесь $\sqrt[n]{r}$ арифметический, а $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Корень степени n в множестве комплексных чисел имеет n различных значений. Исключение представляет $z = 0$. В этом случае все значения корня равны между собой и равны нулю.

Модуль корня n-й степени из комплексного числа равен корню той же степени из модуля подкоренного числа, а аргумент для каждого значения корня определяется по формуле

$$\varphi_{k+1} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Пример 1. Найти корень кубический из числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Решение.

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\,k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\,k\right)\right].$$

При $k = 0$ имеем:

$$n_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

При $k = 1$:

$$n_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right)\right].$$

При $k = 2$:

$$n_3 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right)\right].$$

Не трудно убедиться, что при $k = 3, 4, 5, 6, \ldots$ будем получать $n_4 = n_1$, $n_5 = n_2$, и т. д., т. е. новых значений корня мы уже не получим.

Пример 2. Найти кубический корень из единицы.

Решение. Имеем

$$1 = 1(\cos 360°\,k + i\sin 360°\,k).$$

Тогда

$$\sqrt[3]{1} = 1(\cos 120°\,k + i\sin 120°\,k).$$

При $k = 0, 1, 2$ получим соответственно:

$$n_1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°) = 1;$$

$$n_2 = 1(\cos 120° + i\sin 120°) = 1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$n_3 = 1(\cos 240° + i\sin 240°) = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

6. **Геометрическое истолкование действий над комплексными числами. Сложение.** Пусть требуется сложить числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Числу z_1 соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу z_2 — вектор

$\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 74). Из конца M_1 вектора $\overrightarrow{OM_1}$ проведем вектор $\overrightarrow{M_1M}$, равный вектору $\overrightarrow{OM_2}$, т. е. такой, который имеет с вектором $\overrightarrow{OM_2}$ одинаковую длину и направление. Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ даст геометри-

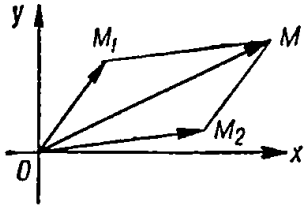


Рис. 74.

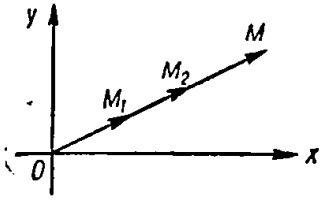


Рис. 75.

ческое изображение суммы $z_1 + z_2$. Если векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ лежат на одной прямой, то и вектор OM лежит на той же прямой (рис. 75 и 76).

Построенный вектор $\overrightarrow{OM}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$.

Итак, *сумма двух комплексных чисел представляется суммой векторов, изображающих отдельные слагаемые.*

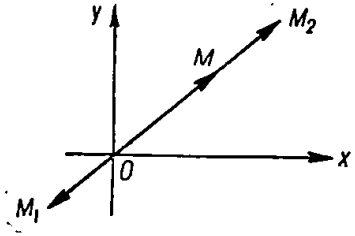


Рис. 76.

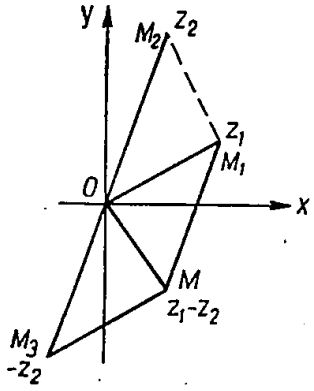


Рис. 77.

Сумма трех (и большего числа) комплексных чисел также представляется суммой векторов, изображающих отдельные слагаемые.

Вычитание. Пусть требуется вычесть число $z_2 = a_2 + b_2 i$ из числа $z_1 = a_1 + b_1 i$. Числу z_1 геометрически соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу z_2 — вектор $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 77). Чтобы получить вектор, соответствующий разности $z_1 - z_2$, преобразуем эту разность: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Точка M_3, соответствующая $(-z_2)$, получается из точки

z_2 посредством преобразования симметрии относительно начала 0. Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ соответствует числу $z_2 - z_1$.

Построенный вектор $\overrightarrow{OM}$ называется разностью векторов $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_1}$.

Итак, *разность двух комплексных чисел представляется разностью двух векторов, изображающих уменьшаемое и вычитаемое.*

Умножение. Чтобы построить вектор $\overrightarrow{OM}$, соответствующий произведению $z_1 z_2$, где $z_1 = r(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

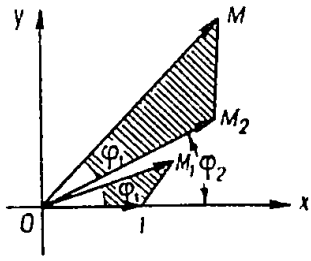


Рис. 78.

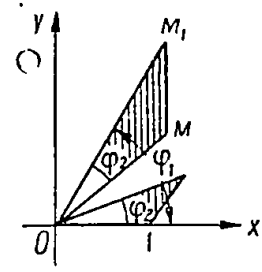


Рис. 79.

достаточно вектор $\overrightarrow{OM_1}$, соответствующий числу z_1, повернуть на угол φ_2 и подвергнуть его преобразованию растяжения (или сжатия, если $r_2 < 1$) в r_2 раз (рис. 78).

Если $r_2 = 1$, то вектор $\overrightarrow{OM_1}$ можно будет только повернуть на угол φ_2.

Деление. Так как деление $\frac{z_1}{z_2} = z$ можно представить как умножение $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, то способ построения вектора $\overrightarrow{OM}$, соответствующего числу z, будет следующий: вектор $\overrightarrow{OM_1}$, соответствующий числу z_1, достаточно повернуть на угол φ_2 и подвергнуть операции сжатия (или растяжения, если $r_2 < 1$) в r_2 раз (рис. 79).

Здесь r_2 и φ_2 — модуль и аргумент z_2. Если $r_2 = 1$, то вектор $\overrightarrow{OM_1}$ только повернется на угол φ_2.

Извлечение корня. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Отсюда следует, что все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{|z|}$, а аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующие соседним значениям k (k и $k+1$), отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$ и поэтому *точки, соответствующие значениям* $\sqrt[n]{z}$, *являются вершинами правильного* n*-угольника, вписанного в окружность радиуса* $\sqrt[n]{|z|}$ *с центром в начале координат.*

Способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$, таков (рис. 80). Из начала координат, как из центра, описываем окружность, радиус которой равен $\sqrt[n]{|z|}$. Проведя из начала координат луч, направленный к положительному направлению действительной оси под углом в n раз меньшим, чем угол, образованный с тем же направлением луча, идущим из начала координат в точку z, мы найдем на окружности точку, соответствующую значению $\sqrt[n]{z}$ при $k=0$. Вписав в окружность правильный n-угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, мы построим точки, соответствующие остальным значениям корня.

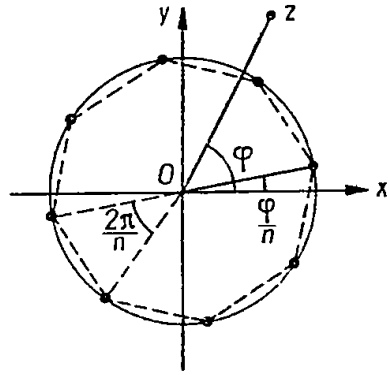


Рис. 80.

§ 47. Исторические сведения о комплексных числах

Числа, впоследствии получившие наименование комплексных, впервые появились в одной из задач Д. Кардано. Назвал он их «софистическими» числами, желая этим подчеркнуть их парадоксальность: считалось, что корень квадратный из отрицательного числа не имеет смысла, и в то же время произведение двух таких корней оказалось вполне реальным числом.

Начало применению комплексных чисел в математике положили Г. Лейбниц и И. Бернулли. Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел существуют и являются комплексными числами. И. Бернулли и Даламбер пытались доказать, что они действительны. Этот спорный вопрос удалось решить Л. Эйлеру. Он показал, что логарифмы отрицательных и комплексных чисел — числа мнимые.

В нескольких заметках, вышедших в первой четверти XVIII в., А. Муавр указал на связь, существующую между комплексными чис-

лами и тригонометрическими функциями, и вывел, правда, в неявной форме, свою знаменитую формулу. В явной форме:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi;$$

эта формула была выведена Л. Эйлером в 1748 г. Несколько раньше, в 1740—1743 гг., Л. Эйлер установил основное соотношение, связывающее показательную и тригонометрические функции:

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x.$$

Со второй половины XVIII в. началась уже интенсивная разработка вопросов, связанных с понятием комплексного числа. Начало систематического использования комплексных чисел связано с работами Эйлера и Даламбера, которые выяснили ряд свойств комплексных чисел и их связь с некоторыми задачами геодезии, картографии, гидродинамики.

Однако, несмотря на все достижения теории, математики отказывались считать комплексные числа реально существующими. Основным противоречием была невыясненность самого понятия мнимой единицы: с одной стороны, было известно, что не существует числа, квадрат которого был бы равен -1, и в то же время действия с такого рода «мнимыми» числами приводили к правильным результатам. Таким образом, надо было или признать, что комплексные числа являются своего рода условностью, или же найти их истолкование, связанное с объективной реальностью. Подобное геометрическое истолкование и было найдено в самом конце XVIII в.

Впервые геометрическое изображение комплексных чисел было предложено Г. Кюном, учителем гимназии в Данциге в 1750—1751 гг. Однако только в 1799 г. норвежский математик Гаспар Вессель (1745—1818) дал общее геометрическое истолкование комплексных чисел как точек на плоскости. Существенным было то, что Вессель показал, что все известные до того времени числа являются лишь частными случаями комплексных.

В начале XIX в. над вопросами дальнейшего обоснования теории комплексных чисел работали К. Ф. Гаусс и О. Коши. К. Ф. Гаусс ввел и сам термин «комплексные числа».

§ 48. Уравнения высших степеней

1. Некоторые общие теоремы. Уравнениями высших степеней называются алгебраические уравнения степени выше второй. Общий вид таких уравнений:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

а) Всякое алгебраическое уравнение n-й степени в множестве комплексных чисел имеет n корней, среди которых могут быть и равные друг другу.

б) Если многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ имеет корень x_1, то он делится на $x - x_1$, т. е. $f(x) = (x - x_1)\,Q(x)$. Это — следствие из теоремы Безу: *остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на* $x - x_1$ *равен* $f(x_1)$.

в) Всякий многочлен n-й степени в множестве комплексных чисел может быть представлен и притом единственным способом в виде произведения двучленов первой степени:

$$f(x) = A\,(x - x_1)^m\,(x - x_2)^p\,\ldots\,(x - x_n)^r,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни данного уравнения, а $m + p + \cdots + r = n$.

г) Если уравнение с действительными коэффициентами (а только такие и рассматриваются в элементарной алгебре) имеет комплексный корень $a + bi$, то оно имеет и сопряженный с ним корень $a - bi$. Если же это уравнение нечетной степени, то оно должно иметь хотя бы один действительный корень.

д) Всякое уравнение с действительными коэффициентами имеет четное число мнимых корней попарно сопряженных.

е) Как уже отмечалось (стр. 257), для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ справедлива теорема Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

а

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения.

Вообще для уравнения n-й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

имеем:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

а

$$x_1 \cdot x_2,\ \ldots,\ x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

ж) Для того чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

необходимо, чтобы p было делителем свободного члена a_n, а q — делителем коэффициента a_0.

з) Если уравнение имеет целые коэффициенты и коэффициент при x^n равен 1, то рациональными корнями могут быть только целые числа.

и) Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

В некоторых случаях, используя изложенные выше свойства, можно легко решать уравнения высших степеней с целыми коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Решение. Так как уравнение имеет целые коэффициенты и коэффициент при x^3 равен единице, то целыми корнями могут быть только делители свободного члена, т. е.

$$1;\ 2;\ 3;\ -1;\ -2;\ -3.$$

Проверим, не является ли 1 корнем данного уравнения:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Тогда на основании теоремы Безу полином в левой части имеет делителем $x - 1$.

Можно или непосредственно разделить левую часть на $x - 1$ или элементарным приемом представить в виде произведения:

$$x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = \\ = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Квадратный трехчлен легко разлагается на множители, следовательно,

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0.$$

Отсюда получаем, что корни данного уравнения будут 1; 2; 3.

Некоторые алгебраические уравнения высших степеней можно решить, сведя их к квадратному.

2. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители, 1,
а правая есть нуль. В этом случае левую часть уравнения разлагают на множители, из которых каждый — многочлен не выше второй степени. Тогда приравниваем нулю каждый множитель в отдельности и решаем полученные уравнения. Найденные корни будут корнями исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$.

Решение. Левая часть легко разлагается на множители x и $x^2 + 3x - 10$ и, следовательно, распадается на два уравнения

$$x = 0 \text{ и } x^2 + 3x - 10 = 0,$$

из которых находим три решения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -5.$$

Эффективность решения уравнений этим способом зависит от умения разложить левую часть уравнения на множители. Проиллюстрируем это на примерах.

Примеры. Решить уравнения:

а) $x^3 + 6 = 7x$; б) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$;

в) $x^3 + (b^2 - a^2)\,x + ab^2 = 0$; г) $x^4 + 2x^3 - 13x^3 - 14x + 24 = 0$.

Решение.

а) $x^3 - 7x + 6 = 0$; $x^3 - x - 6x + 6 = 0$; $(x^3 - x) - (6x - 6) = 0$;

$$x^2(x-1) - 6(x-1) = 0; \quad (x-1)(x^2-6) = 0.$$

Тогда

$$x - 1 = 0 \text{ и } x^2 - 6 = 0.$$

Значит,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{6}, \quad x_3 = -\sqrt{6}.$$

б)

$$x^3 - 5x^2 + x^2 - 5x + x - 5 = 0; \quad x^2(x-5) + x(x-5) + (x-5) = 0;$$

$$(x-5)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Тогда

$$x - 5 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0.$$

Значит,

$$x_1 = 5, \quad x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

в)

$$x^3 + b^2x - a^2x + ab^2 = 0; \quad (x^3 - a^2x) + (b^2x + ab^2) = 0;$$

$$x(x^2 - a^2) + b^2(x + a) = 0; \quad x(x-a)(x+a) + b^2(x+a) = 0;$$

$$(x+a)[x(x-a) + b^2] = 0; \quad (x+a)(x^2 - ax + b^2) = 0.$$

Тогда

$$x + a = 0 \text{ и } x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Значит,

$$x_1 = -a, \quad x_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

г)

$$(x^4 + x^3 - 12x^2) + (x^3 + x^2 - 12x) + (-2x^2 - 2x + 24) = 0;$$
$$x^2(x^2 + x - 12) + x(x^2 + x - 12) - 2(x^2 + x - 12) = 0;$$
$$(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 2) = 0.$$

Тогда

$$x^2 + x - 12 = 0 \text{ и } x^2 + x - 2 = 0.$$

Значит,

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -2.$$

Проверка. По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_1}{a_0};$$
$$3 - 4 + 1 - 2 = -\frac{2}{1}; \quad -2 = -2;$$
$$x_1x_2x_3x_4 = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}; \quad 3 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot (-2) = (-1)^4 \cdot \frac{24}{1};$$
$$24 = 24.$$

3. Двучленные уравнения. *Двучленным уравнением* называется уравнение вида $ax^m + b = 0$, $(a \neq 0)$. Разделив обе части такого уравнения на a, получим приведенное двучленное уравнение $x^m \pm q = 0$. Чтобы решить такие уравнения, полагают, что $x = \sqrt[m]{q} \cdot z$; тогда эти уравнения приводятся к более простым:

$$z^m - 1 = 0, \quad z^m + 1 = 0.$$

Решение таких уравнений элементарными способами может быть выполнимо при некоторых частных значениях m. Общий прием состоит в разложении левой части уравнения на множители, после чего уравнение приводится к виду, рассмотренному нами раньше *.

Примеры. Решить уравнения:

а) $x^3 - 1 = 0$;

б) $16x^4 + 81 = 0$.

Решение.

а) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Значит уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет своими корнями корни уравнений $x - 1 = 0$ и $x^2 + x + 1 = 0$.

---

* Когда уравнение имеет вид $ax^m + bx^n = 0$, где $m > n$, то его можно представить так: $x^n(ax^{m-n} + b) = 0$ и, следовательно, оно распадается на два уравнения: $x^n = 0$ и $ax^{m-n} + b = 0$.

Решив их, найдем, что уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет следующие три корня:

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

б) Разделив обе части данного уравнения на 16, получим

$$x^4 + \frac{81}{16} = 0.$$

Пусть

$$x = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \cdot z = 1{,}5z,$$

тогда

$$z^4 + 1 = 0.$$

Это уравнение можно решать несколькими способами.

Первый способ*.

$$z^4 = -1, \quad z^2 = \pm i,$$

$$z_{1,2} = \sqrt{i} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_{3,4} = \sqrt{-i} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Второй способ.

$$z^4 + 1 = 0, \quad z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = 0, \quad (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = 0,$$
$$z^2 + 1 - \sqrt{2}\,z = 0 \text{ и } z^2 + 1 + \sqrt{2}\,z = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i),$$

$$z_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

---

* См. формулы на стр. 375.

Третий способ.

$$z_{1,\,2,\,3,\,4} = \sqrt[4]{\cos(180^\circ + 360^\circ k) + i\sin(180^\circ + 360^\circ k)} =$$
$$= \cos(45^\circ + 90^\circ k) + i\sin(45^\circ + 90^\circ k),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$$z_1 = \cos 45^\circ + i\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_2 = \cos 135^\circ + i\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i),$$

$$z_3 = \cos 225^\circ + i\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$z_4 = \cos 315^\circ + i\sin 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

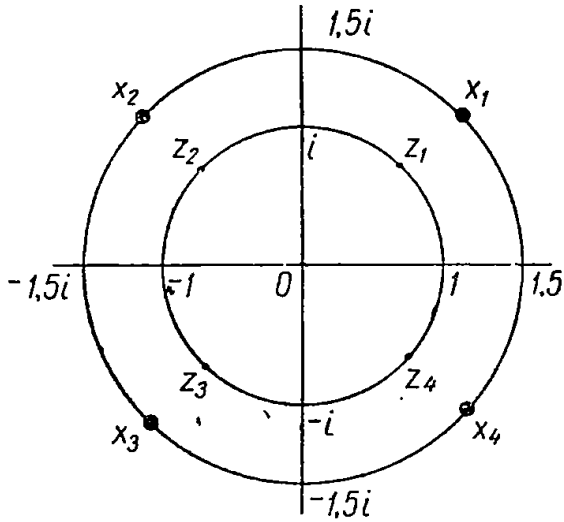


Рис. 81.

Графически корни уравнения $z^4 + 1 = 0$ можно изобразить, как показано на рис. 81. Корни данного уравнения получим, если аргументы чисел z_1, z_2, z_3, z_4 умножим на 1,5.

Ответ. $x_1 = \frac{3}{4}\sqrt{2}(1 + i)$; $x_2 = -\frac{3}{4}\sqrt{2}(1 - i)$; $x_3 = -\frac{3}{4}\sqrt{2}(1 + i)$; $x_4 = \frac{3}{4}\sqrt{2}(1 - i)$.

4. Биквадратное уравнение. Уравнение четвертой степени, в которое входят только четные степени неизвестного, называется *биквадратным*. Его записывают так:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Это уравнение приводится к квадратному при помощи замены $x^2 = z$; имеем $az^2 + bz + c = 0$. Формула решений биквадратного уравнения такова:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Она дает четыре корня биквадратного уравнения, а именно:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Пример. Решить уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение. $x^2 = z$. Получаем уравнение $z^2 - 13z + 36 = 0$. Тогда $z_1 = 9$, $z_2 = 4$. Из равенства $x^2 = z$, подставляя вместо z найденные числа 9 и 4, получаем следующие четыре решения данного уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

5. Трехчленное уравнение. *Трехчленными* называются уравнения вида:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

(частный случай такого уравнения при $n = 2$ есть биквадратное уравнение). Трехчленное уравнение с помощью замены $x^n = z$ приводится к квадратному уравнению

$$az^2 + bz + c = 0,$$

откуда

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставив в равенство $x^n = z$ вместо z его значения z_1 и z_2, получим два двучленных уравнения n-й степени:

$$x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решив, если возможно, эти двучленные уравнения, мы получим все решения данного трехчленного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Решение. $x^3 = z$, $z^2 - 9z + 8 = 0$. Тогда $z_1 = 8$ и $z_2 = 1$; следовательно, $x^3 = 8$ и $x^3 = 1$.

Решив эти двучленные уравнения третьей степени, получим шесть значений для x:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = -1 - i\sqrt{3},$$
$$x_4 = 1, \quad x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

6. Симметричные уравнения. Уравнения вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + cx^2 + bx + a = 0,$$

у которого коэффициенты членов, равно удаленных от начала и конца, равны, называются *симметричными*, или *возвратными*.

Например, $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Симметричное уравнение имеет следующее свойство: если число x_1 есть его решение, то обратное число $\frac{1}{x_1}$ также будет его решением *.

Симметричное уравнение может быть как четной, так и нечетной степени.

Способ решения этого уравнения четной степени покажем на примере уравнения четвертой степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Разделив обе части уравнения на x^2 (так как $x \neq 0$), получим

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Заменяя $x + \frac{1}{x}$ новой буквой y, получим

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Следовательно, симметричное уравнение четвертой степени приводится к квадратному уравнению.

Симметричное уравнение четной степени можно привести с помощью подстановки $y = x + \frac{1}{x}$ к уравнению в два раза меньшей сте-

* Ни один из корней симметричного уравнения не может быть равным нулю.

пени, чем степень исходного. Для этого делят все члены данного уравнения на x^n (если степень данного была $2n$) и группируют члены, равноотстоящие от конца и начала. После этого делают замену по формулам:

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

и т. д.

Симметричное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$. Если это уравнение поделить на $x + 1$, то получится симметричное уравнение четной степени, на единицу меньше степени исходного уравнения.

Таким образом, всякое симметричное уравнение нечетной степени приводится к двум уравнениям: $x + 1 = 0$ и симметричному уравнению четной степени, на единицу меньше степени исходного уравнения.

Рассмотренные выше уравнения называют симметричными уравнениями *первого рода*.

Уравнения вида

$$ax^{2k} + bx^{2k-1} + cx^{2k-2} + \ldots + dx^{k+1} + lx^k - dx^{k-1} + \\ + \ldots + (-1)^{k-1} bx + (-1)^k a = 0$$

называются *симметричными уравнениями второго рода*. Решаются эти уравнения тем же методом, но новое неизвестное y связывается с x соотношением

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

Пример. Решить уравнение

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Решение. Это симметричное уравнение нечетной степени, следовательно, оно имеет корень $x = -1$. Разделим многочлен, имеющийся в левой части данного уравнения, на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 & x + 1 \\ \underline{-\,2x^5 + 2x^4} & \\ -\,3x^4 - 13x^3 & 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 \\ \underline{-\,3x^4 + 3x^3} & \\ -16x^3 - 13x^2 & \\ \underline{-\,-16x^3 - 16x^2} & \\ -\,3x^2 + 5x & \\ \underline{-\,3x^2 + 3x} & \\ -\,2x + 2 & \\ \underline{-\,2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно, для определения остальных корней данного уравнения надо решить уравнение

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0, \text{ или } 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Полагая $y = x + \frac{1}{x}$, получим $2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$, откуда $y_1 = -4$, $y_2 = 2{,}5$.

Следовательно, $x^2 + 4x + 1 = 0$ и $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$.

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

§ 49. Соединения

1. Множества. Теория соединений, или, как ее еще называют, от, *комбинаторика*, — это раздел элементарной алгебры, где изучаются некоторые операции над конечными множествами и решаются задачи, связанные с этими операциями.

Понятия *множества* — одно из неопределяемых основных понятий в математике. С этим понятием встречаемся во всех ее разделах. Так, в арифметике рассматривают множество натуральных чисел, множество простых чисел; в алгебре — множество многочленов, корней данного уравнения и т. п. Объекты, составляющие множество, называются *элементами* этого множества. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*. Такими множествами являются множество всех двузначных чисел, множество вершин данного многоугольника, множество его диагоналей и т. д. Множество, содержащее неограниченное количество элементов, называется *бесконечным*. Бесконечным множеством, например, является множество всех натуральных чисел, всех простых чисел и т. д.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым*.

Если всякий элемент множества A есть элементом множества B, то множество A называют *подмножеством* множества B. Подмножеством множества B считают также пустое множество и само множество B; их называют *несобственными подмножествами*; остальные подмножества называют *собственными*.

Множество $M = \{a, b, c, d, \ldots\}$ называется *упорядоченным*, если между его элементами установлено некоторое соотношение $a < b$ (читают: «a предшествует b»), имеющее следующие свойства:

1) для каких-либо двух элементов a и b действительно одно и только одно из соотношений $a = b$, $a < b$, $b > a$;

2) для всяких трех элементов a, b и c из соотношений $a > b$ и $b > c$ следует соотношение $a > c$.

2. Перестановки. Пусть мы имеем множество M, состоящее из n элементов: a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Если переставлять эти элементы всевозможными способами, оставляя неизменным их общее число, получим несколько последовательностей:

$$a_1a_2a_3 \ldots a_n,$$
$$a_2a_1a_3 \ldots a_n,$$
$$a_na_3a_2 \ldots a_1 \text{ и т. д.}^*$$

Каждую из этих последовательностей называют перестановкой из данных n элементов.

Пример. Ниже приведены 6 всевозможных перестановок из букв a, b и c:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Итак, перестановкой из n элементов называется всякая конечная последовательность, которая получается в результате упорядоченности некоторого конечного множества, состоящего из n элементов.

Если множество имеет некоторое число элементов, то его можно упорядочить несколькими способами. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n. Это число равно произведению всех целых чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\,n.$$

Произведение n первых натуральных чисел принято обозначать символом $n!$:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Символ $n!$ читают «эн факториал». Это слово происходит от латинского *factor*, что значит множитель.

Примечание. При $n = 1$ в выражении $1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots, n$ остается одно число 1. Поэтому принимается (в качестве определения), что $1! = 1$. При $n = 0$ выражение $1 \cdot 2, \ldots, n$ вовсе лишается смысла. Однако принимается (в качестве определения), что $0! = 1$.

Итак, $P_n = n!$

Верна также следующая формула:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Пример. Каким числом способов можно рассадить 8 зрителей в ряду из 8 мест?

Решение. $P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$.

3. Сочетания (комбинации). Пусть имеем множество M, состоящее из n различных элементов.

---

* Записывая перестановки, обычно между их членами не ставят запятых. Однако на приведенные выше записи ни в коем случае нельзя смотреть как на произведения.

Всякое подмножество множества M, содержащее k элементов ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), называется *сочетанием* или *комбинацией* из данных n элементов по k элементов.

Из определения следует, что два различных сочетания из данных n элементов по k элементов отличаются по крайней мере одним элементом.

Пример. Из множества цифр 1, 2, 3, 4 можно образовать такие сочетания по два элемента: 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4.

Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k (*combinatio* от *combinare* (лат.) — соединять). Но иногда вместо C_n^k пишут $\binom{k}{n}$.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$, равно произведению k последовательных натуральных чисел, из которых наибольшее есть n, деленному на произведение последовательных натуральных чисел от 1 до k

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}.$$

Формулу для C_n^k можно записать в ином виде. Умножив числитель и знаменатель дроби в правой части ее на произведение $1 \cdot 2 \times 3 \ldots (n-k)$, получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

или

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}}.$$

Примечание. Из n элементов можно составить только одно сочетание, содержащее все n элементов, поэтому $C_n^n = 1$. Формула для C_n^k дает это значение только в том случае, если принять 0! за 1. В качестве определения принимается, что $C_n^0 = 1$.

Принято также считать, что $C_0^0 = 1$.

Пример. Найти число диагоналей выпуклого десятиугольника.

Решение. Вершины десятиугольника образуют совокупность 10 точек плоскости, из которых любые три не лежат на одной прямой. Соединяя всякую пару этих точек отрезком прямой, получаем

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

отрезков, 10 из которых являются сторонами многоугольника, а другие 35 — его диагоналями.

4. Свойства сочетаний. а) Число сочетаний из n элементов по k элементов равно числу сочетаний из n элементов по $n-k$ элементов, т. е.

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (n \geqslant k).$$

Это соотношение позволяет упростить нахождение числа сочетаний из n элементов по k, когда k превосходит $\frac{1}{2}n$.

Пример. $C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700.$

б) Число сочетаний из n элементов по k элементов равно числу сочетаний из $n-1$ элементов по k элементов, прибавленному к числу сочетаний из $n-1$ элементов по $k-1$ элементов, т. е.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Приведем еще несколько соотношений между выражениями для чисел различного вида сочетаний (такие соотношения называют также *комбинаторными тождествами*):

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n) = C_{2n}^n;$$

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \ldots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p.$$

5. Размещения. Возьмем какое-либо множество M, состоящее из n элементов.

Всякое упорядоченное подмножество, содержащее k элементов данного множества n элементов, называется *размещением* из n элементов по k (элементов).

Таким образом, два разных размещения из данных n элементов по k отличаются друг от друга или составом элементов, входящих в них, или порядком их размещения.

Пример. Из трех цифр 1, 2, 3 можно образовать такие размещения по два:

1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2.

Число размещений из n элементов по k обозначается символом A_n^k (*Arrangement* (франц.) — размещения).

Число всевозможных размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных целых чисел, из которых наибольшее есть n, т. е.

$$A_n^k = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1),$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

Пример. В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в день?

Решение. Всевозможные распределения уроков в день представляют собой, очевидно, всевозможные размещения из 10 элементов по 5; поэтому всех способов распределения должно быть:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240.$$

В перестановках, сочетаниях и размещениях, которые мы выше рассмотрели, элементы, входящие в них, не повторяются, и поэтому их называют соответственно перестановками, комбинациями, размещениями *без повторений*.

В математике рассматривают также перестановки, сочетания и размещения *с повторениями*. Этот материал с достаточной полнотой изложен в книге: С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, изд. «Советская наука», 1951, стр. 495—502.

§ 50. Решение примеров и задач на соединения

Пример 1. Упростить выражение $\dfrac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} P_{2x-n}}$.

Решение.

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} P_{2x-n}} = \frac{(2x+1)!\,(2x-n)!}{(2x-1)!\,(2x-n)!} = 2x\,(2x+1).$$

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110$.

Решение. $\dfrac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = 110$. Следовательно,

$(x+1)(x+2) = 110$ или $x^2 + 3x - 98 = 0$, $x_1 = -12$, $x_2 = 9$.

Отрицательное значение x отбрасываем.

Ответ. $x = 9$.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_{2x}^{n-2} : A_{2x}^{n-3} = 8, \\ C_{2x}^{n-2} : C_{2x}^{n-3} = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{(2x)!}{(2x-n+2)!} : \dfrac{(2x)!}{(2x-n+3)!} = 8, \\ \dfrac{(2x)!}{(2x-n+2)!\,(n-2)!} : \dfrac{(2x)!}{(2x-n+3)!\,(n-3)!} = \dfrac{8}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x-n+3 = 8, \\ \dfrac{2x-n+3}{n-2} = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Далее

$$n-2 = 3, \quad n = 5, \quad x = 5.$$

Ответ. $n = 5$, $x = 5$.

Задача 1. Число перестановок из n букв относится к числу перестановок из $n+2$ букв, как 0,1 к 3. Найти n.

Решение. По условию

$$\frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{0{,}1}{3}, \text{ или } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{30},$$

откуда

$$(n+1)\,(n+2) = 30.$$

Корни этого уравнения $n_1 = 4$, $n_2 = -7$.

Второй корень не годится.

Ответ. $n = 4$.

Задача 2. Число сочетаний из n элементов по 3 в 5 раз меньше числа сочетаний из $n+2$ элементов по 4. Найти n.

Решение. По условию

$$5C_n^3 = C_{n+2}^4,$$

или

$$\frac{5n(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

откуда

$$5\,(n-2) = \frac{(n+2)\,(n+1)}{4}.$$

Ответ. $n_1 = 14$, $n_2 = 3$.

Задача 3. Сколькими возможными способами можно избрать из 15 человек делегацию в составе 3 человек?

Решение. Так как делегации a, b, c и b, a, c одинаковы, то искомое число является числом сочетаний из 15 по 3, т. е. оно равно C_{15}^3:

$$C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1365.$$

Задача 4. Сколькими разными способами собрание, состоящее из 40 человек, может избрать из своего числа председателя собрания, его заместителя и секретаря?

Решение. Избрать определенные три человека из 40 человек можно так:

a — председатель,	a — секретарь,
b — секретарь,	b — председатель,
c — зам. председателя;	c — зам. председателя

и т. д.

Следовательно, количество разных способов будет A_{40}^3:

$$A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280.$$

Задача 5. На плоскости расположено 10 точек так, что из них никакие три, за исключением одной тройки точек, не лежат на одной прямой. Сколько разных прямых можно провести через эти точки?

Решение. Если бы три точки не лежали на одной прямой, то всего можно было бы провести C_{10}^2 прямых. Если при этом одна точка перемещается так, что будет на одной прямой с двумя другими точками, то из трех разных прямых получим одну. Итак, всего прямых можно провести $C_{10}^2 - 2 = 43$.

Задача 6. Сколько возможных способов для образования дозора из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

Решение. При одном офицере и 80 солдатах можно образовать дозор C_{80}^3 способами. При трех офицерах число способов будет в три раза больше, т. е. $3C_{80}^3 = 246480$.

Задача 7. Сколько возможных способов распределения 6 разных предметов между тремя лицами, так чтобы каждое из них получило 2 предмета?

Решение. Одно лицо может получить два предмета из шести C_6^2 способами.

Пусть лица A, B, C получили при одном способе распределения по два предмета так:

$$A — ab, \quad B — cd, \quad C — ef.$$

Поменяв местами собственников этих предметов, получим P_3 способов распределения, что соответствует одной комбинации из 6 элементов по 2. Итак, всего способов распределения будет $P_3 \cdot C_6^2 = 90$.

Задача 8. Сколько может быть случаев выбора двух карандашей и трех ручек из 5 разных карандашей и 5 разных ручек?

Решение. Из пяти разных карандашей два карандаша можно выбрать C_5^2 способами; из пяти разных ручек три ручки можно выбрать C_5^3 способами. Одному выбору двух карандашей из пяти соответствует C_5^3 способов выбора ручек. Итак, всего способов выбора двух карандашей и трех ручек будет:

$$C_5^2 \cdot C_5^3 = C_5^2 \cdot C_5^2 = (C_5^2)^2 = 100.$$

Задача 9. Среди сочетаний из 10 букв a, b, c, ... по 4 сколько таких, что не содержат букву a?, буквы a и b?

Решение. Чтобы вычислить количество сочетаний из 10 букв a, b, c, ... по 4, которые не содержат буквы a, надо подсчитать число сочетаний из 9 букв b, c, ... по 4; их будет $C_9^1 = 126$. Тогда число сочетаний из 10 по 4, не содержащих букв a и b, будет $C_8^4 = 70$.

Задача 10. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в каждое число входит каждая из данных цифр не более одного раза?

Решение. Различными однозначными числами, исключая нуль, будут $A_4^1 = 4$. Если бы среди данных цифр не было нуля, то число различных двузначных чисел было бы равно A_5^2. Но так как среди них есть нуль, то в числе размещений из этих пяти цифр по две есть однозначные числа, это те, которые начинаются с нуля. Число их равно $A_4^1 = 4$. Значит, различных двузначных чисел получится $A_5^2 - A_4^1 = 16$. Аналогично найдем, что число различных трех-, четырех- и пятизначных чисел будет соответственно $A_5^3 - A_4^2 = 48$, $A_5^2 - A_4^3 = 96$, $A_5^5 - A_4^4 = 96$. Всего получится $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$ чисел.

Задача 11. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв по три партии каждый, и потому на турнире было сыграно всего 84 партии. Сколько было участников первоначально?

Решение. Пусть искомое число участников турнира было x. Полностью сыграли друг с другом по партии лишь $x - 2$ участников (двое выбыли) и число этих партий, очевидно, равно числу $C_{x-2}^2 =$

$= \frac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$. Это число партий вместе с шестью сыгранными двумя выбывшими участниками составило 84 партии. Отсюда получаем уравнение $\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84$. Решаем его: $x^2 - 5x - 150 = 0$, $x = 15$ (отрицательный корень отбрасываем).

Ответ. 15.

Примечание. В решении предполагается, что выбывшие игроки друг с другом не играли. Это действительно так, потому что уравнение $C_{x-2}^2 + 5 = 85$ не имеет решений.

§ 51. Бином Ньютона

1. Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами. Выражение $x + a$, как и вообще всякий двучлен, называется *биномом*. Обыкновенным умножением находим:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 +$$
$$+ (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd.$$

Эти произведения представляют собой многочлены, расположенные по убывающим степеням x. Все они составлены по одному и тому же закону: показатель первого члена равен числу перемножаемых биномов, показатели при x в следующих членах убывают на 1; последний член не содержит x (т. е. содержит его в нулевой степени).

Коэффициент первого члена есть 1; коэффициент второго члена есть сумма всех вторых членов перемножаемых биномов; коэффициент третьего члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по два; коэффициент четвертого члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по три, и т. д. Последний член есть произведение всех вторых членов.

Эта закономерность применима к произведению какого угодно числа биномов, т. е. верна формула

$$(x + a)(x + b)(x + c) \cdots (x + k) = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \cdots + S_m,$$

где

$$S_1 = a + b + c + \cdots + i + k,$$
$$S_2 = ab + ac + \cdots + ik,$$
$$S_3 = abc + abd + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_m = abc \ldots ik.$$

Пример. Найти произведения биномов:

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4).$$

Решение.

$$S_1=(-1)+2+(-3)+4=2;$$
$$S_2=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+(-1)\cdot 4+2(-3)+2\cdot 4+$$
$$+(-3)\cdot 4=-7;$$
$$S_3=(-1)\cdot 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 2\cdot 4+(-1)\cdot(-3)\cdot 4+$$
$$+2\cdot(-3)\cdot 4=-14;$$
$$S_4=(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4=24.$$

Итак,

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24.$$

2. **Формула бинома Ньютона.** Если в приведенной выше формуле все вторые члены биномов одинаковы, т. е. $a=b=c=\cdots=k$, тогда левая часть будет степень бинома $(x+a)^m$, а S_1, S_2, ..., S_m будут соответственно равны ma, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3$, ..., a^m.

Таким образом, мы получаем

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\times$$
$$\times a^nx^{m-n}+\cdots+a^m.$$

Эта формула называется формулой бинома Ньютона. Ее можно записать и так:

$$(x+a)^m=x^m+C_m^1ax^{m-1}+C_m^2a^2x^{m-2}+C_m^3a^3x^{m-3}+$$
$$+\cdots+C_m^na^nx^{m-n}+\cdots+a^m.$$

Примечание. Формулы квадрата суммы и куба суммы (стр. 168, 169) есть частные случаи этой общей формулы.

Пример. $(x+a)^5=x^5+C_5^1ax^4+C_5^2a^2x^3+C_5^3a^3x^3+C_5^4a^4x+a^5=$
$$=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

3. **Биномиальные коэффициенты и их свойства.** Коэффициентом первого члена разложения бинома есть 1 (или C_m^0), второго — C_m^1, третьего — C_m^2 и т. д. Коэффициент последнего, $(m+1)$-го члена

равен $C_m^m = 1$. Эти коэффициенты называются *биномиальными*. Общий член разложения имеет вид:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\ \ldots\ [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} a^n x^{m-n}.$$

Из этой формулы можно получить все члены (кроме первого), подставляя вместо n числа: 1, 2, 3, ..., m.

Биномиальные коэффициенты имеют следующие свойства:

1) Коэффициенты членов, одинаково удаленных от концов разло- ло-
жения, равны между собой, т. е.

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

2) Для получения коэффициента следующего члена достаточно но
умножить коэффициент предыдущего члена на показатель буквы x в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому, т. е.

$$C_m^n = \frac{C_m^{n-1}(m-n+1)}{n}.$$

3) Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^m, т. е.

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^n + \cdots + C_m^{m-1} + 1 = 2^m.$$

4) Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных их
местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, т. е.

$$1 + C_m^2 + C_m^4 + \cdots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \cdots$$

4. **Примеры и задачи на бином Ньютона.** Задача 1. В разло- ло-
жении $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена, как 7 : 2. Найти тот член этого разложения, который содержит x в первой степени.

Решение. Биномиальный коэффициент пятого члена равен C_n^4, коэффициент третьего члена равен C_n^2. Тогда, по условию,

$$\frac{C_n^4}{C_n^2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n(n-1)} = \frac{7}{2},$$

отсюда $n = 9$.

Пусть теперь номер члена, содержащего x в первой степени, равен $k+1$. Тогда

$$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k\cdot(\sqrt{x})^{9-k}=C_9^k x^{-\frac{2k}{3}}x^{\frac{9-k}{2}}=C_9^k x^{\frac{27-7k}{6}}.$$

По условию, показатель степени x должен быть равен 1. Значит, $\frac{27-7k}{6}=1$, отсюда $k=3$.

Итак, член, содержащий x в первой степени, есть четвертым членом разложения и равен $T_4=C_9^3x$.

Задача 2. В разложении $\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго. Найти свободный член.

Решение. Коэффициент третьего члена будет C_n^2, а коэффициент второго — C_n^1. По условию $C_n^2-C_n^1=44$. Решая уравнение $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-n=44$, получаем $n=11$ (отрицательное значение отбрасываем). Находим свободный член:

$$T_{k+1}=C_{11}^k(x\sqrt{x})^{11-k}\left(-\frac{1}{x^4}\right)^k=(-1)^kC_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}.$$

Чтобы x был в нулевой степени, нужно чтобы $\frac{33-11k}{2}=0$, т. е. $k=3$. Итак, свободный член равен $-C_{11}^3=-165$.

Задача 3. Найти все рациональные члены разложения $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$, не выписывая члены иррациональные.

Решение. Напишем общий член разложения данного бинома:

$$T_{n+1}=(-1)^nC_{20}^n(\sqrt[3]{2})^{20-n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=(-1)^nC_{20}^n 2^{\frac{40-5n}{6}}.$$

Рациональными члены будут тогда, когда $\frac{40-5n}{6}$ будет целым числом. Выясним, при каких n это выражение будет целым.

$\frac{40-5n}{6}=m$, $40-5n=6m$, $5n=40-6m$, $n=8-m-\frac{1}{5}m$.

Чтобы для n получались целые значения, нужно придавать значения m, кратные пяти, но при этом такие, чтобы число n не выходило из интервала 0 и 20. Такие значения для m будут: —10; —5; 0; 5, а соответствующие числа для n: 20, 14, 8, 2. Искомые члены будут:

$$T_{21} = 2^{-10}; \quad T_{15} = C_{20}^{14} \cdot 2^{-5} = C_{20}^{6} \cdot 2^{-5}; \quad T_9 = C_{20}^{8}; \quad T_3 = C_{20}^{3} \cdot 2^5.$$

Задача 4. Дано многочлен

$$x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^4(3+2x^3)^9.$$

Найти коэффициент члена, содержащего x^5, если выполнить указанные действия.

Решение. В разложении $x(2-3x)^5$ член, содержащий x^5, равен xT_{4+1}, где T_{4+1} — пятый член разложения бинома $(2-3x)^5$:

$$T_{4+1} = (-1)^4 C_5^4 (3x)^4 \cdot 2 = 810x^4.$$

В разложении $x^3(1+2x^2)^7$ член, содержащий x^5, равен x^3T_{1+1}, где T_{1+1} — второй член разложения бинома $(1+2x^2)^7$:

$$T_{1+1} = C_7^1 (2x^2) = 14x^2.$$

Разложение $x^4(1+2x^3)^9$ не содержит x^5.

Итак, коэффициент члена (данного многочлена), содержащего x^5, равен 824.

Задача 5. Многочлен $x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$ разложить по убывающим степеням $x+1$.

Решение. Заменив x на $(x+1)-1$, получим

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 = [(x+1)-1]^4 - 3[(x+1)-1]^3 + \\ + [(x+1)-1]^2 + 1.$$

Если теперь раскрыть по формуле бинома Ньютона выражение $[(x+1)-1]^k$, где $k = 2, 3, 4$, рассматривая $x+1$ как один член, то после приведения подобных членов получим $(x+1)^4 - 7(x+1)^3 + 16(x+1)^2 - 15(x+1) + 6$.

Задача 6. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}?$$

Решение. Имеем:

$$T_{n+1} = C_{100}^n (\sqrt{2})^{100-n} (\sqrt[3]{3})^n = C_{100}^n 2^{\frac{100-n}{2}} 3^{\frac{n}{3}}.$$

Так как для рациональности члена показатели $\frac{100-n}{2}$ и $\frac{n}{3}$ должны быть целыми числами, то число n должно быть кратно 3 и 2, т. е. кратно 6. Но $0 \leqslant n \leqslant 100$ и числа n, кратные шести, будут 0, 6, 12, . . . , 96. Подсчитаем число m их, получим: $96 = 0 + 6(m-1)$, $6(m-1) = 96$, $m - 1 = 16$, $m = 17$.

5. Историческая справка о биноме Ньютона. Разложение выражения $(a+b)^n$ в ряд для целых значений n было известно грекам лишь для случая $n = 2$. Обобщение для любого целого n было сделано среднеазиатскими математиками Омаром Хайямом и ал-Каши. Ал-Каши пользуется биномом для приближенного вычисления корня любой степени из целого числа; с этой целью он составил таблицу биномиальных коэффициентов.

								1												
							1		1											
						1		2		1										
					1		3		3		1									
				1		4		6		4		1								
			1		5		10		10		5		1							
		1		6		15		20		15		6		1						

Эта таблица носит название *треугольника Паскаля*. В Западной Европе она впервые была опубликована в руководствах по арифметике Апиануса в 1527 г. и Штифеля в 1544 г. В 1556 г. Тарталья также опубликовал таблицу биномиальных коэффициентов, причем объявил ее своим изобретением. В 1631 г. исследованием таблицы занимался Аутред, изобретатель логарифмической линейки; несколько позже, в 1654 г., была опубликована работа Паскаля.

В 1676 г. формулу бинома распространил на отрицательные и дробные показатели И. Ньютон, хотя не дал ее доказательства. Последнее было дано Маклореном для рациональных значений n, Эйлером в 1774 г. для дробных показателей. Наконец, в 1825 г. великий норвежский математик Нильс Гендрик Абель (1802—1829) доказал теорему бинома для любого комплексного числа n.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина 154
— погрешность 110
Абсцисса 302
Аксиома индукции 369
Алгебра 148
Алгебраическая сумма 155
— форма комплексного числа 377
Алгебраические дроби 173
— уравнения 216
Алгоритм Евклида 77
Антилогарифмы 329
Аргумент 300
— комплексные числа 376
Арифметика 40
Арифметические действия 46
Арифметическое значение квадратного корня 181
Арифмометр 66
Биквадратное уравнение 393
Биллион 45
Бином 159
— Ньютона 405
Величины 115
— обратно пропорциональные 132
— переменные 299
— — зависимые 300
— — независимые 300
— постоянные 299
— прямо пропорциональные 131
Взаимно однозначное соответствие 185
Возведение в степень 51
Вынесение за скобки 171
Выражения арифметические 158
— алгебраические 158
— дробные 173
— иррациональные 189
— тождественные 161
— целые 159
Вычисления инструментальные 64
— на арифмометре 68
— на логарифмической линейке 345
— на счетах 65
— приближенные 108
Вычитаемое 47
Вычитание 47
— алгебраических дробей 177
— многочленов 163
— одночленов 163
— чисел именованных 123
— — комплексных 373
— — рациональных 155
— — систематических 81
Гипербола 307
Граничная абсолютная погрешность 110
— относительная погрешность 111

График функции 302
Действия первой ступени 58
— второй ступени 59
Деление 49
— дробей алгебраических 178
— — десятичных 100
— — обыкновенных 93
— многочленов 166
— на равные части 124
— одночленов 165
— по содержанию 124
— с остатком 50
— чисел именованных 124
— — комплексных 374
— — рациональных 156
— — систематических 82
Делимое 49
Делитель (компонент) 49
Делитель числа 76
Десятичные знаки 98
Детерминант 236
Дискриминант 252
Доли единицы 83
Дробь алгебраическая 173
— десятичная 97
— неправильная 84
— обыкновенная 83
— правильная 84
Задачи арифметические 136
— на движение 145
— на доказательство 136
— на вычисление 136
— на исследование 136
— на предположение 142
— на пропорциональные величины 133
— на проценты 105
— на смешение 143
— на уравнивание данных 142
— неопределенные 136
— определенные 136
— переопределенные 136
Законы сложения 51
— умножения 53
Знаки противоположные 154
Знаменатель 84
— геометрической прогрессии 364
Значения допустимые 159
— недопустимые 159
Извлечение корня 181
— — из дроби
— — из комплексного числа 375
— — из приближенного числа
Интерполирование 328
Исследование систем уравнений 237
Квадрат многочлена 169
— разности 169
— — неполный 170
— суммы 168
— — неполный 170
Квадриллион 45
Квинтиллион 45
Комбинаторика 396
Комбинации 397
Константы 299
Координаты 302
Корень квадратный 180
— m-й степени 188
— уравнения 217
Коэффициенты 160
— биномиальные 405
— пропорциональности 132
Куб 51
— разности 169
— суммы 169
Логарифмирование 323
Логарифмы десятичные 318
— натуральные 318
Логарифмическая линейка 342
— — нормальная 344
— шкала 343
Логарифмические вычисления 330
Мантисса 325
Математическая индукция 369
Меры английские 116
— метрические 117

— русские старые 116
Мнимая единица 371
Многочлен 159
Множество бесконечное 396
— конечное 396
— пустое 396
— упорядоченное 396
Множимое 48
Множитель 48
Модуль комплексного числа 376
— перехода 322
— шкалы 344
Натуральный ряд 41
— — расширенный 45
Неизвестное (в уравнении) 215
Неравенства 285
— буквенные 285
— высших степеней 293
— второй степени 292
— дробные 295
— иррациональные 296
— первой степени 287
— с неизвестными 286
— тождественные 297
Нуль 45
Нумерация письменная 43
— устная 43
Обратные отношения 125
— числа 94
— функции 305
Общее кратное 78
Общий делитель 77
— член последовательности 352
Одночлены 159
— подобные 162
Округление чисел 109
— — с избытком 109
— — с недостатком 109
Определитель 2-го порядка 236
— 3-го порядка 241
— системы 236
Ордината 302
Основание логарифма 318
— системы счисления 79
— степени 51
Остаток 50
Ось абсцисс 301
— ординат 301
— числовая 153
Отношение 125
— кратное 126
— процентное 106
— разностное 126
Парабола 307
Перестановка 397
— членов пропорции 129
Периодическая десятичная дробь 102
— — — смешанная 102
— — — чистая 102
Подкоренное выражение 181
Подмножество несобственное 396
— собственное 396
Показатель степени 50
— — дробный 211
— — нулевой 211
— — отрицательный 210
Полином 159
Порядок действий 58
Последовательность 351
— числовая 351
Потенцирование 325
Правило девятки 60
— Крамера 236
— подсчета цифр 112
— Саррюса 241
— тройное простое 133
— — сложное 134
Превращение дробей 98
— именованных чисел 122
Предел последовательности 353
Признаки делимости 71
Принцип А. Н. Крылова 112
Проверка действий 60
Прогрессия арифметическая 361
— геометрическая 364

— — бесконечно убывающая 365
Произведение 48
Производные пропорции 130
Пропорция 126
Проценты 104
Равенство 215
Равносильные неравенства 287
— уравнения 217
— системы уравнений 230
Радикалы 181
— подобные 197
Разложение на множители многочленов 171
— — — чисел 75
Размещения 399
Разность 47
— арифметической прогрессии 361
— квадратов 167
— кубов 170
Решение неравенств 287
— систем уравнений 230
— уравнений 217
— — графическим способом 314
Решето Ератосфена 74
Свойства логарифмов 319
— — десятичных 325
— неравенств 285
— равных отношений 131
— сочетаний 399
— уравнений 218
Секстиллион 45
Септиллион 45
Системы неравенств 289
Системы уравнений 229
— — однородные 244
Скобки 95
Слагаемые 46
Сложение дробей алгебраических 177
— — десятичных 100
— — обыкновенных 89
— многочленов 163
— одночленов 163
— чисел действительных 187
— — именованных 123
— — комплексных 373
— — рациональных 155
— — систематических 81
Сокращение дробей алгебраических 174
— — десятичных 98
— — обыкновенных 88
Сомножители 48
Сопряженные множители 204
Сочетания 397
Среднее арифметическое 297
— гармоническое 298
— геометрическое 297
— квадратическое 298
Степень 51
— многочлена 160
— числа комплексного 374
— — рационального 156
Сравнение дробей десятичных 99
— — обыкновенных 85
— чисел действительных 185
— — рациональных 154
Сумма 46
— кубов 170
Счеты русские 64
Теорема Безу 387
— Виета 257
Теоремы о пределах 359
— — равносильных уравнениях 218
— — радикалах 192
Тождественные выражения 161
— преобразования 162
— — иррациональных выражений 189
Тождество 161
Тригонометрическая форма комплексного числа 377
Триллион 45
Треугольник Паскаля 409

Уменьшаемое 47
Умножение дробей алгебраических 178
— древнерусским способом 49
— — десятичных 100
— — обыкновенных 91
— способом решетки 48
— чисел действительных 188
— — комплексных 374
— — натуральных 47
— — рациональных 156
— — систематических 82
Уравнения 215
— алгебраические 216
— биквадратные 393
— буквенные 216
— возвратные 394
— второй степени 249
— высших степеней 386
— двучленные 390
— дробные 216
— иррациональные 216
— квадратные 249
— линейные 216
— логарифмические 335
— показательные 332
— равносильные 217
— симметричные 394
— трансцендентные 216
— трехчленные 393
— эквивалентные 217
— числовые 216
Факториал 397
Формулы корней квадратного уравнения 252
— обратной пропорциональности 132
— прямой пропорциональности 132
— сокращенного умножения 167
Функциональная зависимость 300
Функция 300
— алгебраическая 301
— возрастающая 303
— квадратная 307
— линейная 303
— логарифмическая 319
— монотонная 303
— неограниченная 304
— нечетная 304
— обратная 305
— ограниченная 304
— показательная 312
— степенная 311
— убывающая 303
— элементарная трансцендентная 301
— четная 304
Характеристика логарифма 325
Цифры 43
— арабские 44
— значущие 111
— индийские 44
— римские 45
— сомнительные 111
— точные 111
Частное 49
— неполное 50
Числа взаимно простые 78
— вещественные 184
— двузначные 46
— действительные 184
— дробные 84
— именованные 122
— — простые 122
— — составные 122
— иррациональные 183
— комплексные 371
— — противоположные 373
— — сопряженные 373
— мнимые 371
— натуральные 41
— однозначные 46
— отвлеченные 122
— отрицательные 153
— положительные 153
— приближенные 109
— простые 73

— противоположные 154
— рациональные 153
— смешанные 84
— систематические 79
— составные 73
— точные 109
— целые 45
— — неотрицательные 45
Числитель 84
Члены дроби 84
— отношения 125
— последовательности 351
— пропорции 127

Швецов Константин Иванович,
Бевз Григорий Петрович

«СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ»

Арифметика, алгебра

Редакторы: *В. М. Кухарь, Е. А. Ченакал, Д. М. Косницер*
Художественный редактор *В. М. Тепляков*
Оформление художника *Г. М. Балюна*
Технический редактор *Д. В. Вирич*
Корректоры *М. М. Азаренко, Г. М. Столярчук*

БФ 02367.Зак.№ 5-353. Изд.№ 312. Тираж 400000(1—250000). Формат бумаги 70×108/32. Печ. физ. листов 13,0 + 1 вкл. Условн. печ. листов 18,2. Учетно-изд. листов 25,0. Подписано к печати 2/IX-65 г. Цена 85 коп.
Б. З. № 5 1965 г. поз. 9

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.
Книжная ф-ка им. Фрунзе Государственного комитета Совета Министров УССР по печати, Харьков, Донец-Захаржевского, 6/8.